Задачи по алгебре к 15 апреля 2003 г.

1. Составьте таблицу характеров (над $\mathbb{C}$) для групп a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; b) $\mathfrak{S}_3$; c) $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$; d) диэдра.

2. Опишите структуру кольца Гротендика для групп из предыдущей задачи.

3. Вычислите характер стандартного представления группы $\mathfrak{S}_n$.

4. Найдите кратности неприводимых представлений в стандартном представлении групп a) $\mathfrak{S}_3$; b) $\mathfrak{S}_4$.

5. Пусть ρ — неприводимое представление, $e_\rho = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g^{-1})g \in K[G]$, и $\overline{K} = K$. Докажите, что a) $e_\rho \in Z(K[G])$; b) e_ρ — проектор на изотипическую компоненту представления ρ.

6. Пусть V – представление группы G. a) Покажите, что $\Lambda^p V$ и $S^p V$ — подпредставления в $V^{\otimes p}$. Докажите, что b) $\chi_{S^2V}(g) = (\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2))/2$, $\chi_{\Lambda^2 V}(g) = (\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2))/2$; c) если $n_1(\sigma), \dots, n_p(\sigma)$ — длины независимых циклов, из которых состоит σ, то $\chi_{\Lambda^p V}(g) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\varepsilon(\sigma)\chi_V(g^{n_1(\sigma)})\dots\chi_V(g^{n_p(\sigma)})$.

7. Пусть V — неприводимое комплексное представление группы G.
a) Докажите, что на V существует ненулевая G-инвариантная билинейная форма $\iff \overline{\chi}_V = \chi_V$.
Пусть теперь B такая форма. Докажите, что b) $V \cong V^*$; c) B невырождена; d) B единственна с точностью до константы; e) B либо симметрична, либо кососимметрична; f) B симметрична $\iff \sum_{g\in G}\chi_V(g^2) = |G|$; g) B кососимметрична $\iff \sum_{g\in G}\chi_V(g^2) = -|G|$.

8. Докажите, что a) V — представление над $\mathbb{R} \implies V^* \cong V$; b) V — представление над $\mathbb{C} \implies V^* \cong \overline{V}$.

9. Докажите, что a) если U — представление группы G над $\mathbb{R}$, то $V = U_\mathbb{C}$ — представление группы G над $\mathbb{C}$, причем $V \cong V^* \cong \overline{V}$; b) неприводимое комплексное представление V группы G изоморфно представлению вида $U_\mathbb{C} \iff$ на V существует ненулевая G-инвариантная симметрическая форма.

10[1]. Пусть U — неприводимое представление группы G над $\mathbb{R}$. Докажите, что
a) если $\mathrm{End}_G(U) = \mathbb{R}$, то $U_\mathbb{C} = V$ неприводимо над $\mathbb{C}$ и $\chi_U = \chi_V$;
b) если $\mathrm{End}_G(U) = \mathbb{C}$, то $U_\mathbb{C} \cong V \oplus V^*$, $V \not\cong V^*$ неприводимо над $\mathbb{C}$ и $\chi_U = \chi_V + \overline{\chi}_V$;
c) если $\mathrm{End}_G(U) = \mathbb{H}$, то $U_\mathbb{C} \cong V \oplus V$, V неприводимо над $\mathbb{C}$ и $\chi_U = 2\chi_V$.

11. Пусть V — неприводимое представление группы G над $\mathbb{C}$. Докажите, что
a) если $\overline{\chi}_V = \chi_V$ и $\sum_{g\in G}\chi_V(g^2) = |G|$, то $V \cong U_\mathbb{C}$, U — неприводимо над $\mathbb{R}$ и $\chi_U = \chi_V$;
b) если $\overline{\chi}_V \neq \chi_V$, то $V \oplus V^* \cong U_\mathbb{C}$, U — неприводимо над $\mathbb{R}$ и $\chi_U = \chi_V + \overline{\chi}_V$;
c) если $\overline{\chi}_V = \chi_V$ и $\sum_{g\in G}\chi_V(g^2) = -|G|$, то $V \oplus V \cong U_\mathbb{C}$, U — неприводимо над $\mathbb{R}$ и $\chi_U = 2\chi_V$.

12. Опишите неприводимые представления над $\mathbb{R}$ групп a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; b) $\mathfrak{S}_3$; c) $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$.

13. Если G — абелева группа, то группа $\widehat{G} := \mathrm{Hom}(G, \mathbf{S}^1)$ называется двойственной по Понтрягину к G. Постройте канонические изоморфизмы a) $\widehat{G \times H} \cong \widehat{G} \times \widehat{H}$; b) $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \mu_n(\mathbb{C})$, $\widehat{\mu_n(\mathbb{C})} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; c) $\widehat{\widehat{G}} \cong G$; d) $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbf{S}^1$, $\widehat{\mathbf{S}^1} \cong \mathbb{Z}$. e) Докажите, что всякая $\mathbb{C}$-значная функция на G является линейной комбинацией элементов из $\widehat{G}$ и выпишите явную формулу для коэффициентов (преобразование Фурье).

14. (Соответствие Маккея) Пусть G — конечная подгруппа в $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$, $V_1, \dots, V_n$ — все ее неприводимые представления, а L — ее тавтологическое двумерное представление. Пусть $a_{ij} = \mathrm{mult}_{V_i}(V_j \otimes L)$. Предположим, что G — циклическая группа или группа диэдра. Докажите, что a) матрица $C = (2\delta_{ij} - a_{ij})$ симметрична; b) билинейная форма с матрицей Грама C положительно полуопределена; c) вектор с координатами $x_i = \dim V_i$ порождает ядро формы C; d) Нарисуйте граф с n вершинами и a_{ij} ребрами между i-ой и j-ой вершиной. e) Сотрите вершину, соответствующую тривиальному представлению, и все ребра, выходящие из нее. f*) Проделайте те же действия для бинарных групп тетраэдра, куба и октаэдра.

Графы, возникающие в пунктах (d), (e) и (f) очень часто встречаются в математике в задачах классификации. Они называются диаграммами Дынкина.

[1] По теореме Фробениуса (если L — тело над $\mathbb{R}$, то или $L = \mathbb{R}$, или $L = \mathbb{C}$, или $L = \mathbb{H}$) и лемме Шура все возможности для алгебры $\mathrm{End}_G(U)$ исчерпываются приведенными в задаче случаями