Задачи по алгебре к 22 апреля 2003 г.

1. Найдите размерности неприводимых над полем $\mathbb{C}$ представлений группы a) $\mathfrak{S}_4$; b) $\mathfrak{S}_5$.

2. Пусть C — центр группы G, $H = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in C^n \mid x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \} \subset C^n \subset G^n$, а V — неприводимое представление G. Докажите, что
a) $V^{\otimes n}$ — неприводимое представление группы G^n/H; b) $(\dim V)^n | (|G|^n/|C|^{n-1})$; c) $\dim V | (G : C)$.

3. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение, а $R \subset K$ — подкольцо целых. Докажите, что
a) если $\sigma \in \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$, то $\sigma(R) = R$; b) $R \cong \mathbb{Z}^{[K:\mathbb{Q}]}$; c) $K = R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

4. Найдите кольца целых в полях a) $\mathbb{Q}(i)$; b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1})$.

5. Опишите действие функторов Res и Ind на неприводимые представления групп $V_4 \subset A_4 \subset \mathfrak{S}_4$.

6. Пусть $G_2 \subset G_1 \subset G$. Докажите, что a) $\mathrm{Res}^G_{G_2} = \mathrm{Res}^{G_1}_{G_2} \circ \mathrm{Res}^G_{G_1}$; b) $\mathrm{Ind}^G_{G_2} = \mathrm{Ind}^G_{G_1} \circ \mathrm{Ind}^{G_1}_{G_2}$.

7. Пусть $\varphi : H \to G$ — гомоморфизм групп. Определите функторы ограничения $\mathrm{Rep}_G \to \mathrm{Rep}_H$ и индукции $\mathrm{Rep}_H \to \mathrm{Rep}_G$, так чтобы выполнялось условие сопряженности и утверждения предыдущей задачи.

8. Докажите, что a) $\mathrm{Res}(U \oplus V) = \mathrm{Res}\, U \oplus \mathrm{Res}\, V$, $\mathrm{Ind}(U \oplus V) = \mathrm{Ind}\, U \oplus \mathrm{Ind}\, V$; b) $\mathrm{Res}(U \otimes V) = \mathrm{Res}\, U \otimes \mathrm{Res}\, V$;
c) $\mathrm{Res}(V^*) = (\mathrm{Res}\, V)^*$; d) (формула проекции) $\mathrm{Ind}^G_H(U \otimes \mathrm{Res}^G_H V) = (\mathrm{Ind}^G_H U) \otimes V$.

9. Докажите, что a) $\mathrm{Ind}^G_H U = \{ f : G \to U \mid f(hx) = hf(x) \}$ с действием G, заданным формулой $gf(x) = f(xg)$; b) $\mathrm{Ind}^G_H V = V \otimes_{K[H]} K[G]$.

10. Пусть V — представление группы G, $V = \oplus_i V_i$ (сумма подпространств), причем группа G транзитивно переставляет слагаемые. Докажите, что $V = \mathrm{Ind}^G_H V_{i_0}$, где $H = \{ g \in G \mid g(V_{i_0}) \subset V_{i_0} \}$.

11. Пусть H и K подгруппы в G, а ρ — представление G. Докажите, что $\mathrm{Res}^G_K \mathrm{Ind}^G_H \rho = \bigoplus_{s \in K \backslash G/H} \mathrm{Ind}^K_{H_s} \rho_s$, где $H_s = sHs^{-1} \cap K$, а представление ρ_s группы H_s задается формулой $\rho_s(x) = \rho(s^{-1}xs)$.

12. (Критерий Макки.) Докажите, что
a) $\mathrm{Ind}^G_H \rho$ — неприводимо $\iff$ ρ — неприводимо, и $\forall s \in G - H$ имеем $\langle \chi_{\rho_s}, \chi_{\mathrm{Res}^H_{H_s} \rho} \rangle = 0$, где $H_s = sHs^{-1} \cap H$;
b) если H — нормальна, то $\mathrm{Ind}^G_H \rho$ — неприводимо $\iff$ ρ — неприводимо, и $\forall s \in G - H$ имеем $s^{-1}\rho s \ncong \rho$.

13. Над полем $\mathbb{R}$ разложите в сумму неприводимых над $G_1 \times G_2$ представление $V_1 \otimes V_2$, если
a) $G_i = \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$, $(n_1, n_2) = 1$, а V_i — неприводимы; b) $G_1 = G_2 = H$, $V_1 = V_2 = \mathbb{H}$.

14. Докажите, что $\mathrm{Ind}^{G_1 \times G_2}_{G_1} V = V \otimes K[G_2]$.