Задачи по алгебре к 18 февраля 2003 г.

1. Докажите, что a) в категории множеств декартово произведение является произведением, а несвязное объединение — копроизведением; b) в категориях групп, абелевых групп, колец, A-модулей существуют произведения; c) в категории абелевых групп копроизведение совпадает с произведением; d) в категории групп существуют копроизведения.

2. Дайте категорное определение произведения и копроизведения произвольного семейства объектов, и покажите, что в категории абелевых групп бесконечные копроизведения и произведения не изоморфны.

3. Докажите, что a) если $S = S_1 \sqcup S_2$, то $F_S \cong F_{S_1} \sqcup F_{S_2}$, где F_S — свободный объект, порожденный множеством S; b) свободная абелева группа (соотв. A-модуль), порожденная множеством S, изоморфна $\oplus_{s\in S}\mathbb{Z}$ (соотв. $\oplus_{s\in S}A$); c) свободное коммутативное кольцо, порожденное множеством S, изоморфно кольцу многочленов с целыми коэффициентами от переменных, занумерованных элементами множества S.

4. Пусть G — группа. Докажите, что a) найдется подмножество образующих $S \subset G$, такое что канонический гомоморфизм $f : F_S \to G$ сюръективен; b) найдется подмножество порождающих соотношений $R \subset \operatorname{Ker} f \subset F_S$, такое что гомоморфизм $g : F_R \to \operatorname{Ker} f$ сюръективен.

5. Пусть $G_{S,R}$ — группа с образующими S и соотношениями R. Докажите, что a) если $S = \{\,\sigma\,\}$, $R = \{\,\sigma^n\,\}$, то $G_{S,R} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; b) если $S = \{\,\sigma, \tau\,\}$, $R = \{\,\sigma^n, \tau^2, (\tau\sigma)^2\,\}$, то $G_{S,R}$ есть группа симметрий правильного n-угольника; c) если $S = \{\,\sigma_1, \dots, \sigma_n\,\}$, $R = \{\,\sigma_i^2\,\}_{i=1}^n \cup \{\,(\sigma_i\sigma_{i+1})^3\,\}_{i=1}^{n-1} \cup \{\,(\sigma_i\sigma_j)^2\,\}_{1\leqslant i,j\leqslant n\ |i-j|\geqslant 2}$, то $G_{S,R} \cong \mathfrak{S}_{n+1}$.

6. Пусть G' — коммутант группы G, то есть подгруппа группы G, порожденная всеми элементами вида $[g,h] := ghg^{-1}h^{-1}$. Докажите, что a) $G' \triangleleft G$; b) G/G' — абелева; c) проекция $G \to G/G'$ — универсальный объект, в категории пар (f, A), где $A \in \mathcal{A}b$ и $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{G}r}(G, A)$; d) сопоставление $G \mapsto G/G'$ продолжается до функтора $C : \mathcal{G}r \to \mathcal{A}b$; e) если $I : \mathcal{A}b \to \mathcal{G}r$ — вкладывающий функтор, то $\operatorname{Hom}_{\mathcal{G}r}(G, I(A)) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}b}(C(G), A)$ — функториальный изоморфизм; f) существуют морфизмы функторов $\mathrm{Id}_{\mathcal{G}r} \to I \circ C$, $C \circ I \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{A}b}$,

7. Докажите эквивалентности категорий a) Vect_K^n всех n-мерных K-векторных пространств, и категории с одним объектом K^n и $\operatorname{Hom}(K^n, K^n) = \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$; b) если A — коммутативное кольцо, то A-Mod $\cong$ Mod-A; c) $\{\,(V, A) \mid V \in \mathrm{Vect}_K,\ A \in \operatorname{End}(A)\,\} \cong K[x]$-Mod. d) Эквивалентны ли категории $\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}_2}$ и $\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}_3}$?

8. Докажите, что функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ является эквивалентностью категорий $\Longleftrightarrow$ F строго полон и сюръективен на множестве классов изоморфизма.

9. Докажите, что a) все функторы $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ образуют категорию $\operatorname{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$; b) всякий колчан Q можно рассматривать как категорию, так что категория $\mathcal{C}^Q$ эквивалентна категории $\operatorname{Fun}(Q, \mathcal{C})$; c) если G — группа, то $\operatorname{Fun}(G, \mathcal{C}) \cong \mathcal{C}^G$.