Задачи по алгебре к 25 февраля 2003 г.

1. Докажите, что a) если отображение $f : U \to V$ задается матрицей A, то отображение f^* в двойственных базисах задается транспонированной матрицей A^T; b) если заменить базис в V матрицей C, то матрица перехода для двойственных базисов равна $C^{-T} := (C^T)^{-1}$.

2. Докажите, что тензорное произведение над полем a) ассоциативно; b) коммутативно.

3. Докажите, что a) $V \otimes_A A \cong V \cong A \otimes_A V$; b) $A^* \cong A$; c) $\mathrm{Hom}(A, V) \cong V$; d) $V \otimes_A 0 \cong 0 \cong 0 \otimes_A V$.

4. Докажите, что a) если $\dim_K U = n$, то всякий тензор в $U \otimes_K V$ имеет ранг не больше чем n, то есть его можно представить в виде суммы не более чем n разложимых тензоров; b) ранг тензора в $U^* \otimes V$ равен рангу соответствующего морфизма в $\mathrm{Hom}(U, V)$; c) образ канонического отображения $U^* \otimes V \to \mathrm{Hom}(U, V)$ состоит из гомоморфизмов конечного ранга.

5. Пусть A — коммутативное кольцо, а V — свободный A-модуль конечного ранга. Докажите, что
a) $\mathrm{Hom}_A(U, V \otimes W) \cong \mathrm{Hom}_A(U \otimes V^*, W)$; b) $\mathrm{Hom}_A(U \otimes V, W) \cong \mathrm{Hom}_A(U, V^* \otimes W)$; c) $(U \otimes V)^* \cong V^* \otimes U^*$.

6. Постройте канонический гомоморфизм a) $\mathrm{ev} : V^* \otimes V \to K$; b) $\mathrm{ev}^* : K \to V^* \otimes V$ при $\dim V < \infty$. Докажите, что c) $\mathrm{ev} \circ \mathrm{ev}^* = \dim V$; d) при отождествлении $V^* \otimes V \cong \mathrm{Hom}(V, V)$ имеем $\mathrm{ev} = \mathrm{Tr}$, $\mathrm{ev}^* = \mathrm{Id}_V$.

7. Пусть A и B — коммутативные кольца. Введите на $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ структуру кольца, и покажите, что полученное кольцо является копроизведением колец A и B в категории коммутативных колец.

8. Вычислите в категории $\mathbb{Z}$-модулей a) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$; b) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$; c) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.