Задачи по алгебре к 4 марта 2003 г.

1. Найдите размерности пространств a) симметрических форм; b) кососимметрических форм ($\mathrm{char} \neq 2$); c) эрмитовых форм; d) косоэрмитовых форм.

2. Пусть g — невырожденная форма на V, $\dim V = n$. Докажите, что $\{ e_1, \ldots, e_n \}$ — базис $\iff$ матрица $\big(g(e_i, e_j)\big)_{i,j=1}^{n}$ — невырождена.

3. Докажите, что если $\mathrm{char} \neq 2$, то всякая симметрическая билинейная форма $g : V \otimes V \to K$ однозначно определяется ассоциированной квадратичной формой $q(v) := g(v, v)$.

4. Если g — билинейная форма на V, т.ч. $g(v, v') = 0 \iff g(v', v) = 0$, то g либо симметрическая, либо знакопеременная.

5. Опишите орбиты действия группы $\mathrm{Aut}(V)$ на множестве всех симметрических и знакопеременных форм на n-мерном векторном пространстве V над полем a) $\mathbb{C}$; b) $\mathbb{R}$; c) $\mathbb{F}_q$.

6. Пусть g — невырожденная $\mathbb{Z}$-билинейная кососимметрическая форма на свободном $\mathbb{Z}$-модуле. Докажите, что g приводится к блочнодиагональному виду $\mathrm{diag}(a_1 I_2, \ldots, a_n I_2)$, где $0 < a_1 | a_2 | \ldots | a_n \neq 0$.

7. Определим категорию $\mathcal{B}il_K$ K-билинейных форм: $\mathrm{Ob}(\mathcal{B}il_K) = \{ (V, g) \mid V \in \mathrm{Vect}_K,\ g \in \mathrm{Hom}(V \otimes V, K) \}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}il_K}((V, g), (W, h)) = \{ \phi \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid h \circ (\phi \otimes \phi) = g \}$. Докажите, что a) $(V, g) \mapsto (V, g_L^{-1} g_R)$ — функтор из полной подкатегории $\mathcal{B}il_K^{\mathrm{nd}}$ невырожденных форм в категорию представлений одного эндоморфизма; b) если $(V, g) \in \mathcal{B}il_K^{\mathrm{nd}}$, то всякий морфизм $(V, g) \to (W, h)$ в категории $\mathcal{B}il_K$ — вложение.

8. Пусть $\mathcal{B}il_K^{\pm}$ — категория симметрических (кососимметрических) форм ($\mathrm{char}\, K \neq 2$). Докажите, что a) если $(V, g) \subset (W, h) \in \mathcal{B}il_K^{\pm}$ и g — невырождена, то $(W, h) \cong (V, g) \perp (V', g')$ (ортогональная прямая сумма); b) если $U = \mathrm{Ker}\, g \subset V$, то $(V, g) \cong (U, 0) \perp (V', g')$, где g' — невырождена; c) объекты (V', g') в пунктах (a) и (b) определены однозначно с точностью до канонического изоморфизма.