Задачи по алгебре к 11 марта 2003 г.

1. (Критерий Сильвестра) Пусть G — матрица Грама симметрической билинейной формы g. Пусть Δ_k — ее минор на первых k строках и столбцах. Докажите, что a) если $\Delta_1, \ldots, \Delta_n \neq 0$, то r_- равно количеству перемен знака в последовательности $1 = \Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$; b) g положительно определена $\iff \Delta_1, \ldots, \Delta_n > 0$.

2. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}[x]$ с базисом $1, x, x^2, x^3, \ldots$ и применим к нему процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Докажите, что получатся (с точностью до константы) следующие базисы
a) (многочлены Лежандра) $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n]$, если $P \cdot Q = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,dx$;
b) (многочлены Чебышева) $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, если $P \cdot Q = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
c) (многочлены Лаггера) $P_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^n]$, если $P \cdot Q = \int_0^{\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,dx$;
d) (многочлены Эрмита) $P_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}]$, если $P \cdot Q = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}\,dx$.

3. (Неравенства Коши–Буняковского) a) $\sum x_i y_i \leqslant \sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}$; b) $\sum a_i x_i y_i \leqslant \sqrt{\sum a_i x_i^2}\sqrt{\sum a_i y_i^2}$, $a_i > 0$;
c) $\int f(x)g(x)\,dx \leqslant \sqrt{\int f(x)^2\,dx}\sqrt{\int g(x)^2\,dx}$. d) $\int f(x)g(x)p(x)\,dx \leqslant \sqrt{\int f(x)^2 p(x)\,dx}\sqrt{\int g(x)^2 p(x)\,dx}$, $p(x) > 0$.

4. Рассмотрим на пространстве $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ форму $\mathrm{Tr}(AB)$. Найдите ее сигнатуру на подпространствах a) матриц со следом нуль; b) симметрических матриц; c) кососимметрических матриц; d) (строго) верхнетреугольных матриц и вычислите ортогонал к этим подпространствам.

5. Докажите положительную определенность формы a) $\mathrm{Tr}(AB^T)$ на $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$; b) $\mathrm{Tr}(A\bar{B}^T)$ на $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

6. Докажите a) $\mathrm{SO}(2;\mathbb{R}) \cong \mathrm{U}(1) \cong \mathbf{S}^1$; b) $\mathrm{SO}(1,1;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \times \{\pm 1\}$; c) $\mathrm{O}(n;\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n;\mathbb{R}) \cong \{\pm 1\}$;
d) $\mathrm{U}(n)/\mathrm{SU}(n) \cong \mathbf{S}^1$; e) $\mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\} \cong \mathrm{SO}(3;\mathbb{R})$; f) $\mathrm{SU}(2) \cong \mathbf{S}^3$.

7. Докажите, что a) $\mathrm{O}(n) \cong \{A \mid A^T A = E\}$, $\mathrm{U}(n) \cong \{A \mid \bar{A}^T A = E\}$; b) группа $\mathrm{O}(V, g; \mathbb{R})$ (соотв. $\mathrm{U}(V, h)$) компактна $\iff$ форма g (соотв. h) положительно или отрицательно определена.