Задачи по алгебре к 18 марта 2003 г.

1. Докажите, что a) $(\operatorname{Ker} A)^\perp = \operatorname{Im} A^T$; b) если $A(U) \subset U$, то $A^T(U^\perp) \subset U^\perp$.

2. Проверьте, что a) $\operatorname{Tr}(A^T) = \operatorname{Tr}(A)$; b) $\det(A^T) = \det(A)$; c) $\chi_{A^T} = \chi_A$; d) $m_{A^T} = m_A$.

3. Пусть $V = \mathbb{R}[x]$, $(P, Q) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx$. Найдите A^T, если a) $A = d/dx$; b) $A = f(x)$.

4. Пусть $V = \mathbb{R}[x]$, $(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx$ и $K(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$. Положим $A_K(f)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)\,dy$. Найдите A_K^T.

5. Оператор называется нормальным, если $A^T A = AA^T$ (в эрмитовом случае $A^\dagger A = AA^\dagger$). Докажите, что A — нормален $\iff$ a) $|Av| = |A^T v|$ $\forall v \in V$; b) $(A + A^T)/2$ и $(A - A^T)/2$ коммутируют; c) существует ортонормированный базис, в котором A диагонален (в эрмитовом случае); d) существует ортонормированный базис, в котором A блочно-диагонален с блоками вида $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ и (c) на диагонали (в билинейном случае).

6. Докажите, что a) самосопряженные, антисамосопряженные и ортогональные операторы нормальны.
b) всякий ортогональный оператор в некотором ортонормированном базисе блочно-диагонален с блоками вида $\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$, и (± 1) на диагонали.

7. Докажите, что a) вырожденные операторы допускают полярное разложение; b) всякая матрица представляется в виде $A = N_1 S N_2$, где S — диагональна и неотрицательна, а N_1, N_2 — ортогональны. c) Насколько неоднозначно такое представление?

8. Пусть L/K — конечное расширение Галуа, $\operatorname{Gal}(L/K) = G$. a) Докажите, что $V \mapsto V_L := V \otimes_K L$ — строгий функтор $\mathrm{Vect}_K \to \mathrm{Vect}_L$. b) Пусть $W \in \mathrm{Vect}_L$ и $B : G \to \mathrm{GL}(W; K)$ гомоморфизм групп, такой что $\forall \lambda \in L, \sigma \in G, w \in W$ имеем $B(\sigma)(\lambda w) = \sigma(\lambda)B(\sigma)(w)$ (K-структура на W). Докажите, что $V = W^G := \{\, w \in W \mid \forall \sigma \in G\ B(\sigma)(w) = w \,\}$ — K-подпространство, такое что $W = V_L$. c) Докажите, что $V \mapsto V_L$ и $W \mapsto W^G$ — эквивалентности категории Vect_K и категории пар (W, B) (L-векторное пространство с K-структурой).