Задачи по алгебре к 25 марта 2003 г.

1. Докажите, что a) $S^n(U \oplus V) = \bigoplus_{p+q=n} S^p U \otimes S^q V$; b) $\Lambda^n(U \oplus V) = \bigoplus_{p+q=n} \Lambda^p U \otimes \Lambda^q V$;
c) $\det(U \oplus V) = \det U \otimes \det V$; d) $(S^n V)^* \cong S^n V^*$, $(\Lambda^n V)^* \cong \Lambda^n V^*$; e) $\Lambda^n V \otimes \det V^* \cong \Lambda^{N-n} V^*$, где $N = \dim V$.

2. Докажите a) $S^\bullet U \otimes S^\bullet V \cong S^\bullet(U \oplus V)$; b) $\Lambda^\bullet U \otimes \Lambda^\bullet V \cong \Lambda^\bullet(U \oplus V)$; c) если $\dim V = n$, то $S^\bullet V^* \cong K[x_1, \dots, x_n]$.

3. Докажите существование S^n и Λ^n для модулей над произвольным a) полем; b) коммутативным кольцом. c) Докажите, что $\mathrm{Sym} : T^n \to S^n$ и $\mathrm{Alt} : T^n \to \Lambda^n$ — морфизмы функторов.

4. Пусть $\dim U = \dim V = n$. Рассмотрим пространство $U^* \otimes V^*$ билинейных форм на $U \times V$. Докажите, что a) отображение $(U^* \otimes V^*) \times \dots \times (U^* \otimes V^*) \to \det U^* \otimes \det V^*$, $(u^1 \otimes v^1, \dots, u^n \otimes v^n) \mapsto (u^1 \wedge \dots \wedge u^n) \otimes (v^1 \wedge \dots \wedge v^n)$ полилинейно и симметрично; b) если выбрать базисы в U и V и представить билинейную форму матрицей Грама, то индуцированное отображение $S^n(U^* \otimes V^*) \to K$ равняется определителю матрицы Грама.

5. Докажите, что присоединенная матрица $\widehat{A}$ к матрице оператора $A : V \to V$ равна матрице оператора $(\Lambda^{N-1} A)^* : \Lambda^{N-1} V^* \to \Lambda^{N-1} V^*$ с учетом изомофризма $\Lambda^{N-1} V^* \cong V \otimes \det V^*$, где $N = \dim V$.

6. Пусть A — $\mathbb{C}$-алгебра. Докажите, что a) если $\dim_{\mathbb{C}} A = 1$, то $A \cong \mathbb{C}$; b) если $\dim_{\mathbb{C}} A = 2$, то $A \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ или $A \cong \mathbb{C}[t]/t^2$. c) Опишите все классы изоморфизма алгебр A, таких что $\dim_{\mathbb{C}} A = 3$.

7. Пусть Q — колчан. Путем в колчане Q называется такая последовательность стрелок, что начало следующей совпадает с концом предыдущей. Произведение путей — это их объединение (если оно является путем), или ноль. Докажите, что a) векторное пространство $K[Q]$ всех линейных комбинаций путей в Q является K-алгеброй (алгеброй путей колчана); b) если Q состоит из одной вершины и n стрелок, то $K[Q] \cong T^\bullet(K^n)$; c) если Q состоит из n вершин без стрелок, то $K[Q] \cong K^n$; d) $\mathrm{Vect}_K^Q \cong \mathrm{Mod}\text{-}K[Q]$ эквивалентность категорий.

8. Алгеброй Клиффорда $C(g)$ формы $g \in S^2 V^*$ называется фактор алгебры $T^\bullet(V)$ по идеалу, порожденному подпространством $\{\, u \otimes v + v \otimes u - 2g(u,v) \cdot 1 \mid u, v \in V \,\} \subset K \oplus V^{\otimes 2} \subset T^\bullet(V)$. Докажите, что
a) $C(g)$ конечномерна; b) если $\dim V = 2$, $K = \mathbb{C}$, а g — невырождена, то $C(g) \cong \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$;
c) если $\dim V = 3$, $K = \mathbb{C}$, а g — невырождена, то $C(g) \cong \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.