**Задачи по алгебре к 25 марта 2003 г.**

1. Пусть $\dim V = 2n$. Рассмотрим пространство $\Lambda^2 V^*$ билинейных кососимметрических форм на $V$. Докажите, что a) отображение $(\Lambda^2 V^*) \times \dots \times (\Lambda^2 V^*) \to \det V^*$, $(w^1, \dots, w^n) \mapsto (w^1 \wedge \dots \wedge w^n)$ полилинейно и симметрично. b) если выбрать базис в $V$ и представить билинейную форму матрицей Грама, то индуцированное отображение $S^n(\Lambda^2 V^*) \to K$ задается многочленом степени $n$ от коэффициентов матрицы Грама; c) этот многочлен равен пфаффиану;

2. Докажите, что $\mathrm{Pf}(C^T A C) = \mathrm{Pf}(A) \det(C)$.

3. Пусть $A$ — кососимметрическая матрица размера $(2n+1) \times (2n+1)$. Пусть $\mathrm{Pf}_i(A)$ — пфаффиан матрицы, полученной вычеркиванием $i$-ой строки и $i$-ого столбца. Докажите, что $\widehat{A} = (\mathrm{Pf}_i(A)\,\mathrm{Pf}_j(A))$.

4. Пусть $D$ — базисный элемент в $\det V$, а $D^*$ — двойственный базисный элемент в $\det V^*$. Докажите, что отображения $w \mapsto w \vdash D^*$ и $\xi \mapsto D \vdash \xi$ являются взаимно обратными изоморфизмами $\Lambda^k V \overset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \Lambda^{n-k} V^*$.

5. Выпишите явно уравнения Плюккера для множества всех разложимых 2-векторов a) в $\Lambda^2 K^4$; b) в $\Lambda^2 K^5$.