Математический анализ

Топология $\mathbb{R}^n$.

Задача 1. Докажите, что любое открытое подмножество $\mathbb{R}$ есть объединение не более чем счетной совокупности попарно непересекающихся интервалов.

Задача 2. Пересечение любой совокупности замкнутых множеств и объединение конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.

Задача 3. Пусть F – замкнутое множество. Тогда существует последовательность открытых множеств $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая что $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.

Пусть U – открытое множество. Тогда существует последовательность замкнутых множеств $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая что $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Задача 4. Пусть $x = (x^1, \ldots, x^n)$ и $y = (y^1, \ldots, y^n)$ — две точки в $\mathbb{R}^n$. Пусть $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_i (x^i - y^i)^2}$ – расстояние в $\mathbb{R}^n$. Определим еще два расстояния: $d_1(x,y) = \sum_i |x^i - y^i|$, $d_\infty(x,y) = \max_i |x^i - y^i|$. Докажите, что эти два расстояния порождают ту же топологию (тот же запас открытых множеств), что и d_2.

Задача 5. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность точек $\mathbb{R}^n$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:
1) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.
2) $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k, x) = 0$.
3) Для всех $i = 1, \ldots, n$ $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^i = x^i$.
4) Для любого открытого множества $U \ni x$ существует N, такое что $x_k \in U \ \forall k > N$.

Задача 6. а) $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists \{x_k\} \subset A: \ x_k \to x$
б) $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто $\Longleftrightarrow \forall x \in U \ \forall x_k \to x \ \exists N: \ x_k \in U$ при $k > N$.

Задача 7. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$. Докажите, что найдется счетное множество индексов $\{\alpha_k\}$, такое что $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_{\alpha_k}$.

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Множество A называется линейно связным, если для любых двух точек $a, b \in A$ найдется непрерывное отображение (путь) $\gamma : [0,1] \to A$ такой, что $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. Множество A называется связным, если не существует открытых множеств U и V в $\mathbb{R}^n$, таких что $U \bigcap A$ и $V \bigcap A$ непусты, $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \varnothing$, $(U \bigcap A) \cup (V \bigcap A) = A$.

Задача 8. Отрезок $[a, b]$ связен и линейно связен.

Задача 9. Если множество линейно связно, то оно связно.

Задача 10. Пусть Γ есть график функции $y = \sin(1/x)$, где $0 < x \le 1$. Рассмотрим множество, равное объединению Γ с отрезком $[-1, 1]$ оси Oy. Докажите, что это множество связно, но не линейно связно.

Задача 11. Опишите все связные подмножества $\mathbb{R}$.

Задача 12. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ связно, $f : E \to \mathbb{R}^m$ – непрерывно. Тогда $f(E)$ тоже связно.

Задача 13. Докажите что для открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$ связность эквивалентна линейной связности.

Задача 14.* Придумайте две ограниченные области (открытые связные множества) U и V в $\mathbb{R}^2$, такие что $U \bigcap V = \varnothing$, $\partial U = \partial V$.