НМУ, 1 курс 26.02.2003

Математический анализ

Нормы на векторных пространствах и дифференцирование

Определение. Пусть E – векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Функция $\|\cdot\| : E \to [0,+\infty)$ называется нормой на E, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $\|x\| = 0$ только при $x = 0$,
2. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, для всех $x, y \in E$,
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и $x \in E$.

Примеры. На первом занятии мы ввели 3 нормы на $\mathbb{R}^n$: $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$.

Если $\|\cdot\|$ – норма на E, то на E автоматически возникает расстояние (метрика) $\rho(x,y) = \|x-y\|$.

Определение. Пусть $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ – две нормы на E. Они называются эквивалентными, если существуют такие постоянные $a, b > 0$, что $a\|x\|' \le \|x\|'' \le b\|x\|'$ для всех $x \in E$.

Задача 1. Докажите, что нормы эквивалентны тогда и только тогда, когда они задают одну и ту же топологию.

Задача 2. На $\mathbb{R}^n$ любые две нормы эквивалентны.

Определение. Пусть $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ – пространство линейных операторов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ (это пространство изоморфно $\mathbb{R}^{nm}$). Зафиксируем какие-либо нормы на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ и положим $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Tx\|$ для любого $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Задача 3.

1. Проверить, что это норма на $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
2. Пусть $\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^m \xrightarrow{S} \mathbb{R}^p$ — линейные операторы; тогда $\|ST\| \le \|S\|\|T\|$.
3. Если $\alpha: L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ и $\alpha(H) = o(AH)$ при $H \to 0$ для некоторого оператора A, то $\alpha(H) = o(H)$.

Задача 4. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ и даны две функции $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}$.

1. Пусть f_1 и f_2 непрерывны в точке $x_0 \in U$, $f_2(x_0) \ne 0$. Тогда f_1/f_2 непрерывна в x_0.
2. Пусть f_1 и f_2 дифференцируемы в точке $x_0 \in U$, $f_2(x_0) \ne 0$. Тогда f_1/f_2 дифференцируема в x_0 и

$$d\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x_0) = \frac{f_2(x_0)df_1(x_0) - f_1(x_0)df_2(x_0)}{f_2(x_0)^2}.$$

Задача 5. Пусть $\phi : U \to V$ — дифференцируемое отображение, $x \in U$, $y = \phi(x)$, $d\phi(x) : T_xU \to T_yV$ — его дифференциал и $\xi \in T_xU$. Будем записывать $\xi(f)$ вместо $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x)$ (почему это обозначение лучше — см. прошлое занятие). Докажите, что $(d\phi(x)\xi)(f) = \xi(f \circ \phi)$ для любой дифференцируемой функции $f: V \to \mathbb{R}$.

Задача 6. Пусть $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ – кривая, $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = \xi$ — ее вектор скорости. Вектором скорости какой кривой является $d\phi(x)\xi$?

Определение. Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества. Отображение $\phi : U \to V$ называется C^p-диффеоморфизмом, если оно биективно, $\phi \in C^p$ и $\phi^{-1} \in C^p$.

Задача 7. Пусть $M, U \subset \mathbb{R}^n$ – открытые множества, $\phi : M \to U$ – диффеоморфизм, $(y^1, \ldots, y^n)$ — координатные функции в U. Тогда функции $\tilde{y}^i = y^i \circ \phi$ называются криволинейными координатами в M. Пусть $x \in M$ и f дифференцируема в точке x. Докажите, что $d\tilde{y}^1(x), \ldots, d\tilde{y}^n(x)$ – базис в T^*_xM и разложите $df(x)$ по этому базису, при этом постарайтесь не пользоваться (обычными) координатами в M.

Задача 8. Пусть $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Выразите в полярных координатах следующие операторы:

1. $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$;
2. $y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}$;
3. $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (оператор Лапласа).

Задача 9. Рассмотрим уравнение колебаний струны (где $u(x,t):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(График функции $y(x)=u(x,t)$ при фиксированном t — это профиль струны в момент времени t).
а) Найдите общее решение этого уравнения (**Указание:** Рассмотрите новые координаты $\xi=x-at$, $\eta=x+at$).
б) Пусть заданы начальные условия:

$$\begin{cases} u(x,0) & = & u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,|_{t=0} & = & v_0(x). \end{cases}$$

Напишите формулу для решения, заданного этими условиями.
в) Пусть $v_0=0$, а u_0 задана графиком (см. рис.). Нарисуйте профиль струны в моменты времени $t_k=\frac{kl}{4a}$ $(k=0,\dots,5)$.