Математический анализ

Формула Тэйлора.

Задача 1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто и $f \in C^N(U)$. Приведите подобные члены в формуле Тэйлора (см. лекцию) и докажите, что ее можно записать в следующем виде:

$$f(x+h) = \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{Z}_+ \\ \alpha_1+\dots+\alpha_n \le N}} \frac{1}{\alpha_1!\dots\alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n} f(x)}{(\partial x^1)^{\alpha_1}\dots(\partial x^n)^{\alpha_n}} (h^1)^{\alpha_1}\dots(h^n)^{\alpha_n} + o(\|h\|^N)$$

при $h \to 0$. (Здесь $\mathbb{Z}_+$ — множество всех неотрицательных целых чисел.)

Замечание. Наборы $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ называются *мультииндексами*. Если $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, то полагают по определению

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1!\dots\alpha_n!, \quad h^\alpha = (h^1)^{\alpha_1}\dots(h^n)^{\alpha_n},$$
$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{(\partial x^1)^{\alpha_1}\dots(\partial x^n)^{\alpha_n}}.$$

В мультииндексных обозначениях формула Тэйлора приобретает более обозримый вид:

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \le N} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x) h^\alpha + o(\|h\|^N) \quad (h \to 0).$$

Задача 2. Пусть $f \in C^N(U)$ и $f(x+h) = \sum_{|\alpha| \le N} c_\alpha h^\alpha + o(\|h\|^N)$ при $h \to 0$ в некоторой окрестности x. Докажите, что $c_\alpha = \dfrac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}$.

Задача 3. Найдите $\dfrac{\partial^{50} f}{\partial x^{24} \partial y^{26}}(0,0)$ для $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$.

Экстремумы и графики.

Пусть $f \in C^2(U)$ и $x \in U$. Рассмотрим квадратичную форму

$$H_f(x) : T_x U \to \mathbb{R}, \quad H_f(x)h = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} dx^i(h) dx^j(h).$$

Задача 4. Пусть $df(x) = 0$. Может ли f иметь экстремум в x, если $H_f(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения?

Задача 5. Как меняется $H_f(x)$ при замене декартовых координат на криволинейные?

Задача 6. Можно ли исследовать функцию на экстремум в криволинейных координатах по тому же рецепту, что и в декартовых?

Задача 7. Даны функции: **1)** $f(x,y) = -y^2 + x^2 - x^4$; **2)** $f(x,y) = \cos x - y^2$. Нарисуйте их линии уровня (т.е. множества $\{(x,y) : f(x,y) = c\}$) и графики. Найдите их экстремумы.

Теорема о неявной функции. Огибающие.

Задача 8. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in U$, и пусть $F \in C^2(U)$ такова, что $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Пусть $y = f(x)$ — функция, неявно заданная уравнением $F(x,y) = 0$ в окрестности (x_0, y_0) (см. лекцию). Выразите $f''(x_0)$ через частные производные функции F.

Задача 9. Пусть $U \subset \mathbb{R}^3$. $F \in C^1(U)$, и частные производные F не обращаются в нуль в некоторой точке. Пусть $x = x(y,z)$, $y = y(z,x)$, $z = z(x,y)$ — функции, неявно заданные уравнением $F(x,y,z) = 0$. Найдите $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Пусть $\{\gamma_t\}_{t\in I}$ — семейство кривых на плоскости, $\gamma_t = \{(x,y) : f_t(x,y) = 0\}$, где f_t — гладкая функция, причем $df_t \neq 0$ на γ_t. Предположим, что функция $f(t,x,y) = f_t(x,y)$ также гладкая, и положим $M = \{(t,x,y) \in \mathbb{R}^3 : f(t,x,y) = 0\}$. Обозначим через π проекцию $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(t,x,y) \mapsto (x,y)$.

Определение. *Огибающей* семейства $\{\gamma_t\}$ называется множество $E \subset \mathbb{R}^2$, являющееся образом при проекции π тех точек из M, в которых касательная плоскость T_xM (см. лекцию) содержит прямую, параллельную оси Ot.

Следующая задача показывает, как искать огибающие.

Задача 10. Докажите, что $E = \left\{(x,y) : \exists t \in I : f(t,x,y) = \dfrac{\partial}{\partial t} f(t,x,y) = 0\right\}$.

А следующая задача объясняет, почему огибающая так называется.

Задача 11. Пусть $I_0 \subset I$ и $\varphi\colon I_0 \to \mathbb{R}^2$ — гладкая кривая, касающаяся γ_t в точке $\varphi(t)$ для всех t. Докажите, что $\varphi(I_0) \subset E$.

Задача 12. Найдите огибающую семейства отрезков постоянной длины ℓ с концами на положительных координатных полуосях.

Задача 13. Найдите границу зоны досягаемости снаряда при стрельбе из артиллерийского орудия с постоянной начальной скоростью снаряда v_0 под произвольными углами к горизонту.