Математический анализ

Теорема об обратном отображении.

Задача 1. Выведите теорему о неявном отображении из теоремы об обратном отображении.

Определение. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ — открытые множества. Рангом дифференцируемого отображения $f\colon U \to V$ в точке $x \in U$ называется ранг его дифференциала в этой точке: $\mathrm{rk}_x f := \mathrm{rk}\, df(x)$. Точка x называется критической, если $\mathrm{rk}_x f$ не максимален (т.е. меньше, чем $\min(m,n)$).

Задача 2. Для указанных отображений $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ найти критические точки и образ множества этих точек при отображении f. Для каждой критической точки x найти и нарисовать $\mathrm{Ker}\, df(x)$. Найти число прообразов каждой точки $y \in \mathbb{R}^2$.
1) $(x,y) \mapsto (x^2, y)$, **2)** $(x,y) \mapsto (x^2, y^2)$, **3)** $(x,y) \mapsto (x^3 + xy, y)$,
4) $(x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$, **5)** $(x,y) \mapsto (x^2 - y^2 + 2x, 2xy - 2y)$.

Задача 3. Пусть $M \subset \mathbb{R}^N$, и $N = n + m$. Докажите эквивалентность следующих утверждений:
1) Для любой точки $x \in M$ существуют окрестность $U \ni x$ и отображение $F : U \to \mathbb{R}^m$ класса C^p, такие что $\mathrm{rk}_x F = m$, и $U \cap M = \{y : F(y) = 0\}$.
2) Для любой точки $x \in M$ можно так перенумеровать координаты, что найдутся окрестность $U \ni x$ вида $U = I \times J$ (где $I \subset \mathbb{R}^n$ и $J \subset \mathbb{R}^m$ открыты) и отображение $f : I \to J$ класса C^p, такие что $M \cap U = \Gamma_f$ (здесь Γ_f — это график f).
3) Для любой точки $x \in M$ существуют окрестность $U \ni x$ и криволинейные координаты $y^1, \ldots, y^N$ класса C^p в U, такие что $M \cap U = \{y : y^{n+1} = \ldots = y^N = 0\}$.
4) Для любой точки $x \in M$ существуют окрестность $U \ni x$, открытое множество $V \subset \mathbb{R}^n$ и отображение $\varphi : V \to U$ класса C^p, такие что $\mathrm{rk}\,\varphi = n$, $M \cap U = \varphi(V)$, и $\varphi : V \to \varphi(V)$ – гомеоморфизм (то есть существует и непрерывно $\varphi^{-1} : \varphi(V) \to V$).

Определение. Такое M называется подмногообразием в $\mathbb{R}^N$ размерности n.

Задача 4. Являются ли следующие множества подмногообразиями? Найдите их размерности.
1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$, **2)** $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$,
3) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = a\}$,
4) Множество невырожденных матриц $n \times n$ в $\mathbb{R}^{n^2} = M_n$,
5) Множество вырожденных матриц $n \times n$ в M_n ,
6) $\mathrm{SL}(n) = \{A \in M_n : \det A = 1\}$, **7)** $\mathrm{O}(n) = \{A \in M_n : A^T = A^{-1}\}$.

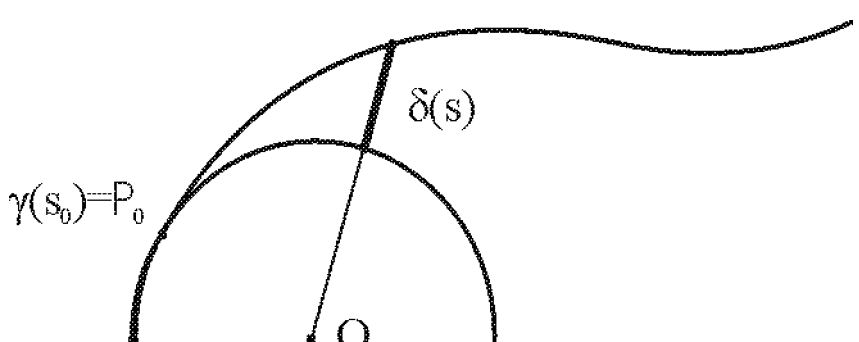
Компактность

Задача 5. (Теорема Александрова) Докажите, что если $f : K \to L$ непрерывно и биективно, а K компактно, то f – гомеоморфизм.

Задача 6. Пусть K – компакт. Докажите, что непрерывность отображения $f : K \to \mathbb{R}^m$ равносильна компактности его графика Γ_f.

Огибающие и эволюты

Задача 7. Пусть $\{\gamma_t\}_{t \in I}$ — семейство кривых на плоскости, $\gamma_t = \{(x,y) : f_t(x,y) = 0\}$, где f_t — гладкая функция, причем $df_t \neq 0$ на γ_t, и функция $f(t,x,y) = f_t(x,y)$ также гладкая. Предположим, что для каждого $t \in I$ кривая γ_t представима в виде $\gamma_t = \{\gamma(t,s) : s \in J\}$, где $\gamma : I \times J \to \mathbb{R}^2$ – гладкое отображение. Докажите, что огибающая E семейства γ_t (см. прошлое занятие) совпадает с образом множества критических точек при отображении γ.



Определение. (см. также прошлый семестр). Пусть $\gamma(s)$ – гладкая кривая, s – натуральный параметр (т.е. $\forall s \quad \|\dot{\gamma}(s)\| = 1$). Окружность соприкасается с γ в точке $P_0 = \gamma(s_0)$, если $\delta(s) = o(s - s_0)^2$ при $s \to s_0$ (см. рис.). Эволюта γ – это множество центров соприкасающихся с γ окружностей.

Задача 8. Пусть $\gamma(t)$ – произвольно параметризованная гладкая кривая, $O \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(t)$ – квадрат расстояния от O до $\gamma(t)$. Докажите, что O – центр соприкасающейся в точке $P_0 = \gamma(t_0)$ окружности тогда и только тогда, когда $\varphi'(t_0) = \varphi''(t_0) = 0$.

Задача 9. Докажите, что эволюта кривой совпадает с огибающей семейства ее нормалей.

Задача 10. Найдите эволюту эллипса и параболы.