Математический анализ

Экстремумы.

Задача 1. Исследуйте на экстремум методом множителей Лагранжа:
1) $x^2 + y^2$ при $xy = 1$,
2) xy при $x^2 + y^2 = 1$,
3) xy при $2x^2 + 8y^2 - x^2y^2 = 0$,
4) $x + y + z$ при $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} = 1$,
5) $x^2 + 2y^2 + 3z^2$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задача 2. Найдите n-мерный параллелепипед максимального объема с заданным периметром a.

Задача 3. Найдите треугольник заданного периметра, который при вращении около одной из сторон образует тело наибольшего объема.

Задача 4. Около прямоугольного параллелепипеда со сторонами $2a$, $2b$ и $2c$ опишите эллипсоид наименьшего объема.

Задача 5. Найдите экстремумы функции $f(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ при $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.

Задача 6. Найдите максимум функции $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ при $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p = 1 \quad (p > 1)$. (Подсказка: должно получиться некое классическое неравенство. Чтобы ответ выглядел более красиво, введите число q, такое, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.)

Задача 7. (Неравенство Минковского). $\left(\sum_i |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_i |y_i|^p\right)^{1/p}$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $p \geq 1$.

Замечание. Из неравенства Минковского следует, что функция $x \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p}$ является нормой на $\mathbb{R}^n$ при всех $p \geq 1$.

Задача 8. (Неравенство Коши). $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$ при $x_i \geqslant 0$.

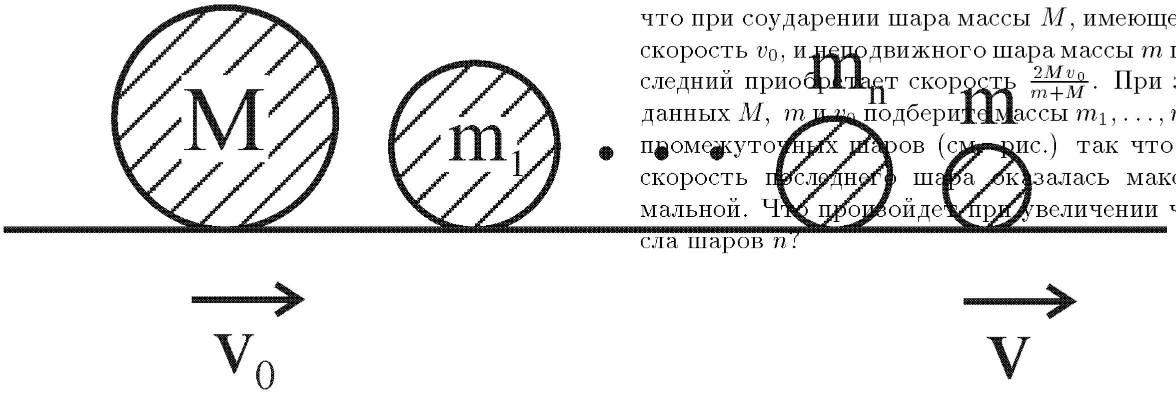
Задача 9. Исследуйте на экстремум квадратичную форму $\sum a_{ij} x_i x_j$ (где $a_{ij} = a_{ji}$) при $\sum x_i^2 = 1$.

Задача 10. Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, а $\mathbb{R}^n$ снабжено евклидовой нормой. Как искать норму A? (Напомним, что $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|$).

Задача 11. Пусть $M = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m\}$, причем $\mathrm{rk}_x(f_1, \ldots, f_m) = m$ при $x \in M$ (так что M — подмногообразие в $\mathbb{R}^n$). Пусть f — гладкая функция, $L(x) = f(x) - \sum_i \lambda_i f_i(x)$ — соответствующая функция Лагранжа, и $dL(x_0) = 0$ в некоторой точке $x_0 \in M$. Предположим, что квадратичная форма $H_L(h) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h^i h^j$ ($h \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$) принимает значения разных знаков. Может ли ограничение f на M иметь экстремум в точке x_0?

Задача 12. Пусть f — гладкая функция на $\mathbb{R}^2$, и пусть ее ограничение на любую прямую, проходящую через $x_0 \in \mathbb{R}^2$, имеет максимум в x_0. Верно ли, что x_0 – точка максимума функции f?

Задача 13. (Задача Гюйгенса) Известно, что при соударении шара массы M, имеющего скорость v_0, и неподвижного шара массы m последний приобретает скорость $\frac{2Mv_0}{m+M}$. При заданных M, m и v_0 подберите массы $m_1, \ldots, m_n$ промежуточных шаров (см. рис.) так чтобы скорость последнего шара оказалась максимальной. Что произойдет при увеличении числа шаров n?



Задача 14. Пусть U — выпуклая область в $\mathbb{R}^n$. Линейный функционал $D : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ называется точечным дифференцированием в точке $x_0 \in U$, если $D(fg) = D(f)g(x_0) + f(x_0)D(g)$ для любых $f, g \in C^\infty(U)$.

1) Покажите, что для любого касательного вектора $\xi \in T_{x_0}U$ производная $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0)$ является точечным дифференцированием.

2) Покажите, что сопоставление $\xi \mapsto \frac{\partial}{\partial \xi}(x_0)$ является изоморфизмом между $T_{x_0}U$ и пространством всех точечных дифференцирований в x_0.

Задача 15. Линейный функционал $\chi : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ называется характером алгебры $C^\infty(U)$, если $\chi(fg) = \chi(f)\chi(g)$ для всех $f, g \in C^\infty(U)$. Установите биекцию между U и множеством всех ненулевых характеров $C^\infty(U)$.

Замечание. Таким образом, алгебра $A = C^\infty(U)$ содержит в себе всю информацию как об U, так и о касательных векторах во всевозможных точках U.