Математический анализ

Интеграл.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное множество, $f : E \to \mathbb{R}$. Положим

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Функция f называется интегрируемой на E, если существует брус $I \supset E$, такой, что $\tilde{f}$ интегрируема на I. При этом полагают $\int\limits_E f(x)\,dx := \int\limits_I \tilde{f}(x)\,dx$.

Задача 1. Докажите, что это определение не зависит от I.

Задача 2. Пусть $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции, причем $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$ для всех x. Положим $E = \{(x,y) : a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$. Докажите, что если $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна, то f интегрируема на E, и

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Задача 3. Вычислите интегралы от функции f по области E:
1) $f(x,y) = e^{-y^2}$, а E ограничена отрезками прямых $x = 0$, $y = 1$ и $y = x$.
2) $f(x,y) = x^2y^2$, а E ограничена отрезками прямых $x = y$, $x = 2y$ и отрезком кривой $xy = 1$.
3) $f(x,y,z) = xy^2z^3$, а E ограничена поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$ и $z = 0$.
4) $f(x,y) = [x+y]$, а $E = [0,2] \times [0,2]$.

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану*, если $f \equiv 1$ интегрируема на E. При этом величина $\mathrm{Vol}_n(E) := \int\limits_E 1\,dx$ называется n-мерным объемом или мерой Жордана E.

Задача 4. Найдите объемы следующих тел:
1) Внутренность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$;
2) Полноторие, полученное вращением круга $x^2 + (y-R)^2 \le r^2$ $(r < R)$ вокруг оси Ox;
3*) Шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса R.

Задача 5. Пусть $V = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1, x^2 + y^2 \le z\}$. Найдите: **1)** объем V; **2)** центр масс V; **3)** моменты инерции относительно координатных осей (предполагается, что плотность V равна 1).

Замечание. Координаты центра масс (x_0, y_0, z_0) тела $V \subset \mathbb{R}^3$ с плотностью ρ вычисляются по следующим формулам:

$$x_0 = \frac{1}{M} \iiint\limits_V x\rho\,dxdydz, \quad \text{где } M = \iiint\limits_V \rho\,dxdydz \text{ — масса тела}$$

(для y_0 и z_0 формулы аналогичны). Момент инерции относительно прямой ℓ вычисляется по формуле

$$I_\ell = \iiint\limits_V r^2\rho\,dxdydz,$$

где $r(x,y,z)$ – расстояние от точки (x,y,z) до прямой ℓ.

Задача 6. Пусть $V \subset \mathbb{R}^3$ – трехмерное тело, I_1, I_2, I_3 – его моменты инерции относительно трех координатных осей. Докажите, что $I_1 \le I_2 + I_3$, $I_2 \le I_1 + I_3$ и $I_3 \le I_1 + I_2$. Когда достигается равенство?

Задача 7. Докажите *теорему Штейнера*: пусть I_0 – момент инерции тела V относительно некоторой оси ℓ_0, проходящей через центр масс V, ℓ – ось, параллельная ℓ_0 и находящаяся на расстоянии r от нее. Тогда момент инерции V относительно оси ℓ равен $I = I_0 + mr^2$ (m – масса тела V).

Задача 8. Приведите пример ограниченной неинтегрируемой функции на отрезке.

Задача 9. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $E \subset \mathbb{R}^n$, тогда $\mu_{n+1}(\Gamma_f) = 0$.

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет *нулевой объем*, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется конечное покрытие $E \subset \bigcup_{i=1}^N I_i$ брусками, такое, что $\sum_{i=1}^N \mathrm{Vol}(I_i) < \varepsilon$.

Задача 10. 1) Пусть множество имеет нулевую меру. Следует ли отсюда, что оно имеет нулевой объем?
2) Докажите предыдущее утверждение для компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$.

Задача 11. Докажите, что если E имеет нулевой объем, то и ∂E тоже имеет нулевой объем. Верно ли аналогичное утверждение, если «нулевой объем» заменить на «нулевую меру»?

Задача 12. Пусть E – ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что E измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда его граница ∂E имеет нулевой объем.

Задача 13. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое по Жордану множество. Докажите, что E имеет нулевой объем (в смысле определения 2) $\Leftrightarrow \int\limits_E 1\,dx = 0$ (так что определения 1 и 2 согласованы).

Задача 14. Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f \ge 0$ — интегрируемая на бруске I функция, причем $\int_I f\,dx = 0$. Докажите, что $f = 0$ почти всюду.

Задача 15. Приведите пример функции $f(x, y)$, интегрируемой на $[0, 1] \times [0, 1]$, у которой $\int\limits_0^1 f(x, y)\,dy$ существует не для всех x.