МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Несобственные интегралы. Замена переменной.

Задача 1. При каких p существует несобственный интеграл $\int_D x^p\,dx$?
1) $D=[1,+\infty)$; **2)** $D=[0,1]$; **3)** $D=[-1,1]$ $(p\in\mathbb{Z})$; **4)** $D=\mathbb{R}$ $(p\in\mathbb{Z})$.

Задача 2. При каких p,q существует несобственный интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$?

Задача 3. Существуют ли несобственные интегралы

$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx \quad \text{и/или} \quad \int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,dx\ ?$$

Если да, то найдите их.

Задача 4. Пусть $E\subset\mathbb{R}^n$, $f\colon E\to\mathbb{R}$, $f\geqslant 0$. Предположим, что для некоторого исчерпания E измеримыми (по Жордану) множествами $\{E_n\}$ существует $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n} f\,dx$. Докажите, что f интегрируема (в несобственном смысле).

Задача 5. Пусть $f\in C[0,+\infty)$ и существует $\lim\limits_{T\to\infty}\int_0^T f\,dx$. Следует ли отсюда, что f интегрируема (в несобственном смысле)?

Предостережение. Довольно часто существование предела из предыдущего упражнения принимают в качестве *определения* интегрируемости в несобственном смысле (для непрерывных функций на $[0,+\infty)$). Поэтому смысл предыдущего упражнения — выяснить, эквивалентно ли это определение тому, которое было на лекции.

Задача 6. (*Корректность определения несобственного интеграла*). Пусть $E\subset\mathbb{R}^n$ ограничено, и $f\colon E\to\mathbb{R}$ ограничена и интегрируема в обычном смысле. Тогда она интегрируема в несобственном смысле, и обычный интеграл совпадает с несобственным.

Задача 7. 1) Пусть $f,g\colon E\to\mathbb{R}$ интегрируемы и ограничены. Тогда и fg интегрируема.
2) Верно ли это без предположения об ограниченности f и g?

Задача 8. Пусть $E_1,E_2\subset\mathbb{R}^n$, $E=E_1\cup E_2$, причем $\mathrm{Vol}_n(E_1\cap E_2)=0$. Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$ интегрируема на E_1 и на E_2. Тогда f интегрируема на E, и

$$\int_E f\,dx=\int_{E_1} f\,dx+\int_{E_2} f\,dx.$$

Задача 9. Решите задачу 3, п.2 с прошлого занятия при помощи замены переменных.

Задача 10. Найдите площади фигур, ограниченных кривыми:
1) $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(a,b,\alpha,\beta>0)$; **2)** $(x-y)^2+x^2=a^2$; **3)** $x^3+y^3-axy=0$ $(a>0)$;
4) $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)$ $(a>0)$.

Задача 11. 1) Найдите $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$.
2) Найдите $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$.

Задача 12. Пусть $E\subset\mathbb{R}^n$ ограничено, $f\colon E\to\mathbb{R}$ — ограниченная функция.
1) Если $\mathrm{Vol}_n(E)=0$, то f интегрируема, и $\int_E f\,dx=0$.
2) Если $\mu_n(E)=0$ и f интегрируема, то $\int_E f\,dx=0$.
3) Если $\mu_n(E)=0$, то следует ли отсюда, что f интегрируема?