Математический анализ

Интегралы, зависящие от параметра. Эйлеровы интегралы.

Задача 1. Найдите $\int\limits_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx$ при $a, b > 0$.

Задача 2. Пусть $I = [a, b] \times [c, d]$, $f \in C(I)$, существует $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in C(I)$, $\phi, \psi : [c, d] \to [a, b]$ — функции класса C^1.

Докажите, что $F(y) = \int\limits_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \in C^1[c, d]$ и найдите $F'(y)$.

Задача 3. Докажите, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, то $F(x) = \frac{1}{2a} \int\limits_{-a}^{a} f(x + t) dt$ дифференцируема.

Чему равна $F'(x)$? Что происходит при $a \to 0$?

Задача 4. Сходится ли на E интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{y} dx}{1 + yx^2}$? Если да, то равномерно ли?

Рассмотрите случаи **1)** $E = [\varepsilon, +\infty)$, **2)** $E = [0, +\infty)$, **3)** $E = (0, +\infty)$.

Задача 5. Найдите $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(yx)}{x\sqrt{1 - x^2}} dx$.

Задача 6. Пусть $I = [a, b) \times [c, d]$ (где $a < b \leq +\infty$), $f \in C(I)$, существует $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in C(I)$, $\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ сходится равномерно, а $\int\limits_a^b f(x, y_0) dx$ сходится для некоторого y_0.

Докажите, что $\int\limits_a^b f(x, y) dx$ сходится равномерно, и существует $\frac{d}{dy} \int\limits_a^b f(x, y) dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$.

Задача 7. Докажите, что если $|f| \leqslant g$ и $\int\limits_a^b g(x, y) dx$ сходится равномерно, то и $\int\limits_a^b f(x, y) dx$ сходится равномерно.

Задача 8. Найдите $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Задача 9. Докажите, что $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}$.

Указание. **1)** $B(x, y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{s^{y-1}}{(1 + s)^{x+y}} ds$, **2)** $\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-at} dt = \frac{1}{a^p} \Gamma(p)$,

3) В 2) положите $p = x + y$, $a = 1 + s$ и проинтегрируйте по s.

Задача 10. Найдите $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} t \cos^{\beta-1} t dt$.

Задача 11. Докажите, что объем шара радиуса r в $\mathbb{R}^n$ равен $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})} r^n$.

Задача 12. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $(x^2 + y^2)^4 = y^3 x$.

Задача 13. Найдите длину эллипса $2x^2 + y^2 = 1$.

Задача 14. **1)** Доопределите $\Gamma(x)$ для $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ так, чтобы сохранялось свойство $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. **2)** Постройте график $\Gamma(x)$.

Задача 15. Докажите, что

$$\int \cdots \int_{x_1 + \ldots + x_n \leqslant 1,\ x_i \geqslant 0} x_1^{p_1 - 1} \ldots x_n^{p_n - 1} f(x_1 + \ldots + x_n) dx_1 \ldots dx_n = \frac{\Gamma(p_1) \ldots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \ldots + p_n)} \int_0^1 f(t) t^{p_1 + \ldots + p_n - 1} dt.$$