НМУ, 1 курс 26.03.2003

Математический анализ

Контрольная работа.

Задача 1. Вычислите дифференциал отображения $A \mapsto A^{-1}$, заданного на множестве всех невырожденных $n \times n$-матриц.

Задача 2. Эллиптические координаты (ρ, ψ) связаны с декартовыми (x, y) формулами $x = a\rho\cos\psi$, $y = b\rho\sin\psi$ (a, b — константы). Найдите якобиан перехода от полярных координат (r, φ) к эллиптическим как функцию полярных координат.

Задача 3. 1) В окрестности каких точек $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $x_0, y_0, z_0 > 0$ уравнение

$$x + y + z = \ln(xyz) + 10$$

определяет z как неявную функцию от x, y?

2) Пусть (x_0, y_0, z_0) — такая точка. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в (x_0, y_0) (считая x_0, y_0, z_0 известными).

Задача 4. 1) Исследуйте функцию $f(x, y) = xy$ на экстремум при условии $F(x, y) = 0$, где $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$.

2) Нарисуйте кривую, заданную уравнением $F(x, y) = 0$. Найдите ее вертикальные и горизонтальные касательные. На том же рисунке изобразите множества уровня функции f, соответствующие ее экстремальным значениям на этой кривой.

3) Напишите тэйлоровское разложение функции $y = y(x)$, неявно заданной уравнением $F(x, y) = 0$ в окрестности начала координат, до членов 8-го порядка.

Задача 5. Не используя лемму Морса, докажите, что все невырожденные критические точки гладкой функции изолированы (т.е. в некоторой окрестности невырожденной критической точки нет других критических точек, кроме нее самой).

Задача 6. Найдите эволюту (огибающую семейства нормалей) астроиды

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

Нарисуйте на одном рисунке астроиду и ее эволюту.

Задача 7. Докажите, что функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) образ каждого отрезка — отрезок;
2) прообраз каждой точки — замкнутое множество.