НМУ, 1 курс 27.04.2003

Математический анализ

Экзамен.

Задача 1. Даны функции $f(x, y, z) = x^2yz^3$ и $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 7xyz$.
1) Найдите $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1)$, если x, y — независимые переменные, а $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$.
2) Найдите $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1)$, если x, z — независимые переменные, а $y = y(x, z)$ задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$.

Задача 2. Найдите огибающую семейства окружностей, построенных как на диаметрах на всевозможных вертикальных хордах окружности $x^2 + y^2 = r^2$.

Задача 3. Рассмотрим отображение $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, заданное формулами

$$\begin{cases} u = \dfrac{x^3 + xy^2 + x}{x^2 + y^2} \\ v = \dfrac{y^3 + yx^2 - y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

1) Найдите его критические точки.
2) В каждой критической точке напишите тэйлоровское разложение для u, v до членов 2-го порядка включительно.
3) Найдите число прообразов произвольной точки $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Задача 4. При каких $\alpha \in [-1, 1]$ сходится интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}}\, dx$? Вычислите его.

Задача 5. Пусть A — положительно определенная 4×4-матрица. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_E e^{(Ax,x)}\, dx$, где $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : (Ax, x) \le 1\}$.

Задача 6. Пусть p — многочлен с комплексными коэффициентами. Докажите, что при отображении $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ образ любого замкнутого множества замкнут.

Задача 7. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^1, причем $\|df(x)\| < 1$ для всех $x \in U$. Положим $g(x) = x + f(x)$. Докажите, что $g\colon U \to g(U)$ — диффеоморфизм.

Задача 8. Пусть f, g — непрерывные монотонные функции на $[a, b]$. Докажите, что

$$\int_a^b f(x)\, dx \int_a^b g(x)\, dx \le (b - a) \int_a^b f(x)g(x)\, dx,$$

если f и g либо обе возрастают, либо обе убывают, и что выполнено противоположное неравенство, если если одна из них возрастает, а другая убывает.