НМУ, 1 курс 28.09.2003

Математический анализ

Экзамен.

Задача 1. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность непрерывных функций на $E \subset \mathbb{R}^m$, сходящаяся к функции f поточечно. Докажите, что f непрерывна на E тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ внутренности множеств $\{x \in E : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\}$ $(n \in \mathbb{N})$ покрывают E.

Задача 2. Найдите огибающую семейства эллипсов фиксированной площади S, главные оси которых совпадают с осями координат.

Задача 3. 1) Исследуйте функцию $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ на экстремум при условии $F(x, y) = 0$, где $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) - 1$.
2) Функция $y = y(x)$ неявно задана уравнением $F(x, y) = 0$ в окрестности точки $x = 0$, причем $y(0) > 0$. Напишите ее тэйлоровское разложение в нуле до членов 2-го порядка включительно.

Задача 4. 1) При каких $a, b > 0$ сходится несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1 + b^2x^2)}\, dx\, ?$$

2) Сходится ли он равномерно по $b \in (0, +\infty)$?
3) Сходится ли он равномерно по $b \in (\delta, +\infty)$ (где $\delta > 0$)?
4) Вычислите его.

Задача 5. Найдите объем тела в $\mathbb{R}^3$, ограниченного поверхностью $x^b + y^b + z^b = a^b$ (где $a, b > 0$) и координатными плоскостями (при условии $x, y, z \geqslant 0$).

Задача 6. Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — неособая двумерная поверхность, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^3$ — некоторые точки. Докажите, что точки на S, для которых сумма квадратов расстояний до $a_1, \ldots, a_n$ будет наибольшей или наименьшей, являются основаниями нормалей, опущенных на S из центра масс точек $a_1, \ldots, a_n$ (при этом предполагается, что массы точек одинаковы).

Задача 7. Пусть I — замкнутый брусок в $\mathbb{R}^n$, $f\colon I \to I$ — сюръективное отображение, не увеличивающее расстояния между точками. Докажите, что f — изометрия.

Задача 8. Пусть f — функция класса C^2 в круге $D \subset \mathbb{R}^2$, причем

$$\int_E (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)\, dxdy < 0$$

для любой области $E \subset D$. Докажите, что f не имеет строгих экстремумов внутри D.