1. Кривые в пространстве. Геодезические на поверхностях (13 февраля 2003)

1. Пусть A и B — фиксированные матрицы порядка n. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ векторные поля $v(x) = Ax$ и $w(x) = Bx$. Вычислите коммутатор $[v, w]$.

Пусть $\gamma(s) = \big(x(s), y(s), z(s)\big)$ — гладкая кривая. Параметр s будем считать натуральным, т.е. $\|v(s)\| = \left\|\frac{d\gamma}{ds}\right\| = 1$. Пусть $\frac{dv}{ds} \neq 0$ для каждой точки кривой γ. Тогда каждой точке кривой γ можно сопоставить *репер Френе*: $e_1(s) = v(s)$, вектор $e_2(s)$ определяется условием $\frac{dv}{ds}(s) = k(s)e_2(s)$, где $k(s) > 0$; вектор e_3 дополняет векторы e_1 и e_2 до положительно ориентированного ортонормированного базиса.

2. Докажите, что $\dot{e}_1 = ke_2$, $\dot{e}_2 = -ke_1 + \varkappa e_3$, $\dot{e}_3 = -\varkappa e_2$. (Формулы Френе.)

Число k называют *кривизной*, а число $\varkappa$ называют *кручением* пространственной кривой.

3. Предположим, что любая нормальная плоскость к кривой $\gamma(s)$ проходит через фиксированную точку $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Докажите, что эта кривая лежит на фиксированной сфере с центром x_0.

4. а) Докажите, что если $k \equiv 0$, то кривая лежит на одной прямой.
б) Докажите, что если $\varkappa \equiv 0$, то кривая лежит в одной плоскости.

5. Дана кривая, которая целиком лежит на сфере и имеет постоянную кривизну. Докажите, что эта кривая — окружность.

Пусть в каждой точке поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ задан единичный нормальный вектор. Если кривая $\gamma(s)$ расположена на поверхности S, то помимо репера Френе каждой точке кривой можно сопоставить *репер Дарбу* ε_1, ε_2, ε_3. А именно, ε_1 — касательный вектор к кривой, ε_3 вектор нормали к поверхности S, а вектор ε_2 определяется тем, что ε_1, ε_2, ε_3 — ортонормированный положительно ориентированный репер.

6. Докажите, что $\frac{d\varepsilon_1}{ds} = a\varepsilon_2 + b\varepsilon_3$, $\frac{d\varepsilon_2}{ds} = -a\varepsilon_1 + c\varepsilon_3$, $\frac{d\varepsilon_3}{ds} = -b\varepsilon_1 - c\varepsilon_2$.

Коэффициент a из задачи 6 называют *геодезической кривизной*. Кривую $\gamma(s)$ на гладкой поверхности называют *геодезической*, если её геодезическая кривизна тождественно равна нулю.
В задачах 7–9 параметризация кривой натуральная.

7. Пусть $\gamma(s)$ — кривая, которая является кратчайшей среди всех кривых на данной поверхности, соединяющих точки A и B. Докажите, что $\gamma(s)$ — геодезическая.

8. Докажите, что если поверхность содержит прямую, то эта прямая является геодезической.

9. Докажите, что на поверхности вращения меридиан всегда является геодезической, а параллель является геодезической тогда и только тогда, когда касательная к меридиану в любой точке параллели параллельна оси вращения.

Пусть $\gamma(t)$ — кривая на поверхности S. Векторное поле $V(t)$ на кривой γ называют *параллельным* вдоль γ, если вектор $\frac{dV}{dt}$ в каждой точке перпендикулярен поверхности.

10. Докажите, что если кривая γ плоская, то векторное поле на плоскости параллельно вдоль γ тогда и только тогда, когда оно постоянно.

11. Докажите, что если две поверхности касаются вдоль кривой γ, т.е. в каждой точке кривой γ касательные плоскости к поверхности совпадают, то векторное поле, параллельное вдоль γ для одной поверхности, будет параллельно вдоль γ и для другой поверхности.

12. Докажите, что кривая γ является геодезической тогда и только тогда, когда её векторы скорости образуют векторное поле, параллельное вдоль γ.

13. Докажите, что векторное поле, параллельное вдоль кривой γ, однозначно определяется одним своим вектором.