Геодезические

1. Доказать, что
а) кривая $a(t) = \{cos(at+b), sin(at+b), ct+d\}$ является геодезической на цилиндре $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Нарисовать эти геодезические в четырех случаях, когда: $a = 0$; $c = 0$; $a \neq 0$, $c \neq 0$.
б) если (e_1, e_2) - пара ортогональных векторов, то окружность большого круга $a(t) = (cosat)e_1 + (sinat)e_2$ (или точка при $a = 0$) является геодезической на сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ в $\mathbb{R}^3$.

2. Пользуясь теоремой существования единственности для ОДУ, доказать, что двух геодезических в примерах из задачи 1 не бывает.

Ковариантная производная, оператор формы, голономия

3. Пусть S - некоторая поверхность в $\mathbb{R}^3$, $\gamma(t)$ - кривая на S, $v \in TS_{\gamma(t_0)}$. Тогда существует единственное векторное поле V, касательное к S вдоль $\gamma(t)$, которое параллельно (т.е. $\nabla_j V = 0$) и для которого $V(t_0) = v$.

4. Пусть $\gamma(t)$ - геодезическая на поверхности S, причем $\gamma(t) \neq 0$, а X - векторное поле вдоль $\gamma(t)$, касательное к S. Тогда X - параллельно $\Leftrightarrow$ $\|X\|$ и угол между X и $\dot{\gamma}$ постоянны вдоль γ.

5. Доказать самосопряженность оператора формы L.

6. Вычислить оператор формы L на сфере, на гиперплоскости.

7. Пусть S-поверхность, ориентированная нормальным векторным полем N. Пусть $p \in S$, $v \in TS_p$. Рассмотрим на S кривую $\gamma(t)$, проходящую через точку p в момент времени t_0 со скоростью v. Доказать, что

$$(\ddot{\gamma}(t_0), N) = (L_p v, v)$$

8. Как найти производную Леви-Чивита тензорного поля типа $(1,1)$ в направлении вектора v? Тот же вопрос для тензорных полей типа $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(0,2)$.

9. Дайте определение геодезического векторного поля на поверхности. Докажите, что векторное поле X на S является геодезическим полем $\Leftrightarrow \nabla_{X_p} X = 0$ для всех $p \in S$.

10. Опишите геодезический поток на эллипсоиде вращения.

11. Вычислить группу голономии сферы в $\mathbb{R}^3$.