27.02.03. Листок 3. Параллельный перенос, кривизна вложенных поверхностей.

Задача 1. Введем на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ координаты (ϕ, ψ):

$$x = \cos\psi\cos\phi, \qquad y = \cos\psi\sin\phi, \qquad z = \sin\psi.$$

В координатах ϕ, ψ найти

а) первую квадратичную форму (метрику).

б) вектор нормали $N = (N_x(\phi,\psi), N_y(\phi,\psi), N_z(\phi,\psi))$.

в) оператор Вайнгартена L, вторую квадратичную форму, гауссову и средние кривизны.

г) найти связность $(D_{\frac{\partial}{\partial\phi}}\frac{\partial}{\partial\phi} =?,\ D_{\frac{\partial}{\partial\psi}}\frac{\partial}{\partial\phi} =?,\ D_{\frac{\partial}{\partial\phi}}\frac{\partial}{\partial\psi} =?,\ D_{\frac{\partial}{\partial\psi}}\frac{\partial}{\partial\psi} =?)$.

д) Векторное поле $\partial/\partial\phi$ сохраняет метрику. Верно ли, что ковариантная производная от метрики вдоль $\partial/\partial\phi$ равна нулю. Если нет, посчитать ее.

Задача 2. Решить аналогичную задачу для тора

$$x = (R + r\cos\psi)\cos\phi, \qquad y = (R + r\cos\psi)\sin\phi, \qquad z = r\sin\psi.$$

Задача 3. [Уравнения Эйлера-Лагранжа] Пусть $L(t, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) = L(t, x, y)$ — произвольная гладкая функция от $2n+1$ переменной (будем называть ее лагранжианом). Рассмотрим функционал на пространстве отображений из отрезка $[a,b]$ в область пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ (рассматриваются отображения с фиксированными концами $x(a) = x_0$, $x(b) = x_1$):

$$\mathcal{L}(x(t)) = \int_a^b L(t, x, \dot{x})dt.$$

Доказать: $x(t)$ — экстремаль титтк

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i}, \qquad 1 \le i \le n.$$

Задача 4. Пусть g_{ij} — тензор метрики на многообразии. Рассмотрим два Лагранжиана:

$$L_1 = \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}, \qquad L_2 = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j.$$

а) Доказать, что любая экстремаль относительно лагранжиана L_2 есть экстремаль относительно L_1.

б) Дать полное описание имеющейся взаимосвязи между решениями этих двух задач.

Практическая польза: Уравнения Эйлера-Лагранжа в точности эквивалентны уравнениям геодезических

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0.$$

Это дает метод, зная метрику, быстро находить компоненты связности Γ^i_{jk}.

Группы голономии

Задача 5. Найти группу голономии конуса:

а) $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{a^2}$, $z > 0$;

б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z > 0$ (Предъявите интеграл, через который выражается монодромия обхода).

Задача 6. Доказать, что группа голономии любой поверхности содержится в ортогональной группе $O(2)$.

Задача 7. Доказать, что если у ориентируемой поверхности есть точки ненулевой гауссовой кривизны, то группа голономии есть $SO(2)$.

Определение: Тензором кривизны (это есть тензор типа (1,3)) называется тензор, который для тройки X, Y, Z векторных полей сопоставляет векторное поле $R(X,Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z$ (из определения неочевидно, что речь идет о тензоре).

Задача 8. Исходя из того, что в евклидовом пространстве $\bar{D}_X \bar{D}_Y Z - \bar{D}_Y \bar{D}_X Z - \bar{D}_{[X,Y]} Z = 0$, докажите:

а) формула для кривизны:

$$R(X,Y)Z = \langle LY, X\rangle\, LX - \langle LX, Z\rangle\, LY,$$

где L — оператор Вайнгартена.

б) формула Кодацци-Майнарди:

$$D_X L(Y) - D_Y L(X) - L([X,Y]) = 0.$$

в) описать тензор кривизны и смысл формулы Кодацци-Майнарди в случае поверхностей из первых двух задач.

Задача 9. [Theorema egregium] Доказать, что тензор кривизны поверхности в трехмерном пространстве $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ однозначно определяется одним числом $\langle R(\partial/\partial u, \partial/\partial v)\partial/\partial u, \partial/\partial v\rangle$ (все остальные компоненты тензора будут либо нулевые, либо выражаться через эту). Выразить это число через метрику g_{ij} и гауссову кривизну K.

Задача 10. Пусть задана поверхность в $\mathbb{R}^3$

$$x = x(x^1, x^2), \qquad y = y(x^1, x^2), \qquad z = z(x^1, x^2),$$

и на ней гладкая кривая $x^i(t)$, $i = 1, 2$ в $\mathbb{R}^3$, ограничивающая область U . Доказать, что

$$\Delta\phi = \iint\limits_U K\sqrt{g}\,dx^1 \wedge dx^2$$

есть угол поворота вектора при параллельном обносе вдоль кривой $x^i(t)$.