4. Геодезические полярные координаты (6 марта 2003)

Пусть O — фиксированная точка поверхности. Проведём через эту точку всевозможные геодезические. Пусть φ — угол, который образует геодезическая с некоторой фиксированной геодезической, r — расстояние по геодезической до точки O. В достаточно малой окрестности точки O числа r и φ являются координатами. Их называют *геодезическими полярными координатами*. Числа $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ называют *геодезическими нормальными координатами* или *римановыми каноническими координатами*.

1. Докажите, что в геодезических полярных координатах первая квадратичная форма имеет вид $dr^2 + g(r,\varphi)d\varphi^2$.

2. Докажите, что все символы Кристоффеля относительно нормальных геодезических координат x, y обращаются в точке O в нуль.

3. Пусть g_{ij} — метрика относительно нормальных геодезических координат x, y. Докажите, что в точке O частные производные $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x}$ и $\frac{\partial g_{ij}}{\partial y}$ обращаются в нуль.

4. Докажите, что

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\sqrt{g}.$$

Здесь K — гауссова кривизна, $g = g(r,\varphi)$ — функция из задачи 1.

5. Докажите, что

$$K_O = -\lim_{r\to 0}\frac{\partial^3\sqrt{g}}{\partial r^3}$$

Здесь K_O — гауссова кривизна в точке O.

6. Докажите, что

$$g(r,\varphi) = r^2 - \frac{K_O}{3}r^4 + r^5 f(\varphi) + \dots$$

7. Докажите, что

$$K_O = \lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\cdot\frac{2\pi r - L}{r^3},$$

где L — длина окружности (на поверхности) радиуса r с центром O.

8. Докажите, что

$$K_O = \lim_{r\to 0}\frac{12}{\pi}\cdot\frac{\pi r^2 - S}{r^4},$$

где S — площадь круга (на поверхности) радиуса r с центром O.

* * *

9. Пусть $\gamma(s)$ — замкнутая гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$ с натуральным параметром $s \in [0, l]$ (l — длина кривой).

а) Докажите, что $\int_0^l k(s)ds \geqslant 2\pi$, причём равенство достигается только плоских выпуклых кривых.

б) Докажите, что если кривая $\gamma(s)$ заузленная, то $\int_0^l k(s)ds \geqslant 4\pi$.

Пусть на плоскости с координатами x, y задано семейство кривых C_α, зависящих от параметра α. *Огибающей* семейства кривых C_α называют кривую C, которая касается каждой из кривых C_α.

10. Найдите огибающую семейства прямых, отсекающих от данного прямого угла треугольник площади $a^2/2$.

11. На сторонах угла с вершиной O фиксированы точки A и B. На отрезках OA и OB выбираются точки A_1 и B_1 так, что $OB_1 : B_1B = AA_1 : A_1O$. Докажите, что огибающая семейства прямых A_1B_1 — дуга параболы.

12. Докажите, что огибающая семейства кривых, высекающих на координатных осях отрезок постоянной длины l, задаётся уравнением $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$ (*астроида*).

13. Докажите, что астроида является траекторией отмеченной точки окружности радиуса $1/4$, которая катится по неподвижной окружности радиуса 1, причём меньшая окружность расположена внутри большей.