Кривизна как явление второго порядка

1. Рассмотрим точку p на гладкой поверхности M в $\mathbb{R}^3$. Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы точка p попала в её начало, а касательная плоскость TM_p к M в точке p была горизонтальна. Тогда локально наша поверхность представляет собой график функции $z = f(x,y)$, причем $f_x = f_y = 0$ в точке $(0,0,0)$. Докажите, что кривизна M в точке p равна

$$K_p = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите кривизну

а) параболоида вращения $z = -\frac{x^2+y^2}{2}$

б) гиперболического параболоида $z = \frac{x^2-y^2}{2}$

3. Пусть φ - параметризованный тор в $\mathbb{R}^3$:

$$\varphi(\theta,\psi) = ((a + b cos\psi)\, cos\theta, (a + b cos\psi)\, sin\theta, b sin\psi).$$

Доказать, что $K(\theta,\psi) = \frac{cos\psi}{b(a+bcos\psi)}$.

4. Пусть $\varphi(t,\theta) = (x(t), y(t)\, cos\theta, y(t)\, sin\theta)$, $y(t) > 0$ для $t \in I$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Доказать, что $K = \frac{x' \begin{vmatrix} y' & x' \\ y'' & x'' \end{vmatrix}}{y\left(x'^2+y'^2\right)^2}$.

Замечание. Если $x'^2 + y'^2 = 1$, то $K = -\frac{y''}{y}$.

5. Пусть $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, где

$x(t) = \int\limits_0^t \sqrt{1-e^{-2\tau}}d\tau \ (t > 0)$

$y(t) = e^{-t}$

и пусть $\varphi(t,\theta)$ поверхность, полученная из кривой $\alpha(t)$ по рецепту задачи 4 (параметризованная псевдосфера).

Докажите, что поверхность $\varphi(t,\theta)$ имеет постоянную кривизну $K = -1$.

6. Что произойдет с секционной кривизной, если удвоить риманову метрику?

Просто так

7. Построить неполное связное риманово многообразие бесконечного диаметра, такое, что никакие две его точки, удаленные друг от друга на расстояние, большее 1, нельзя соединить отрезком.

8. Если G - связная группа Ли, обладающая двусторонне-инвариантной римановой метрикой, то exp: $LieG \to G$ есть отображение "на".

9. Если M - полное риманово многообразие, а N - любое его накрытие, то и N - полное риманово в метрике, индуцированной с M.