27.03.03. Листок 6. Симметрии тензора кривизны.

Пусть V — n-мерное вещественное пространство и $R\colon V\otimes V\otimes V\otimes V\to\mathbb{R}$ — квадрилинейное отображение со следующими свойствами:
(a) $R(v_1,v_2,v_3,v_4)=-R(v_2,v_1,v_3,v_4)$;
(b) $R(v_1,v_2,v_3,v_4)=-R(v_1,v_2,v_4,v_3)$;
(c) $R(v_1,v_2,v_3,v_4)+R(v_1,v_3,v_4,v_2)+R(v_1,v_4,v_2,v_3)=0$.

Задача 1. Покажите, что если R обладает вышеуказанными свойствами, то оно имеет и следующее четвертое свойство:
(d) $R(v_1,v_2,v_3,v_4)=R(v_3,v_4,v_1,v_2)$.
Указание: Рассмотрите соотношение (c) для четверок (v_1,v_2,v_3,v_4), (v_2,v_3,v_4,v_1), (v_3,v_4,v_1,v_2), (v_4,v_1,v_2,v_3) и сложите эти соотношения с правильно выбранными знаками.

Задача 2. Покажите, что размерность пространства квадрилинейных отображений, удовлетворяющих (a), (b), (c), равна $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$, где n — размерность пространства V. (Покажите, что R взаимнооднозначно определяется своими компонентами $R_{ijkl}=R(e_i,e_j,e_k,e_l)$, где $i<j$, $k<l$, $i\le k$, $j\le l$.)

Задача 3. Пусть R и T — два квадрилинейных отображения со свойствами (a), (b), (c), указанными выше. Покажите, что если $R(v_1,v_2,v_1,v_2)=T(v_1,v_2,v_1,v_2)$ для всех $v_1,v_2\in V$, то $R=T$.
Указание: Покажите, что из условия $R(v_1,v_2,v_1,v_2)\equiv 0$ следует $R=0$.

Задача 4. Введем дополнительно на пространстве V скалярное произведение. Пусть p — плоскость, т. е. двумерное подпространство, в V, и пусть v_1, v_2 — ортонормальный базис для p; полагаем

$$K(p)=R(v_1,v_2,v_1,v_2).$$

Покажите, что если $K(p)=c$ для всех плоскостей p, то

$$R=cR_1,$$

где $R_1(v_1,v_2,v_3,v_4)=(v_1,v_3)(v_2,v_4)-(v_2,v_3)(v_4,v_1)$.

Задача 5. Тензор римановой кривизны, рассматриваемый как квадрилинейное отображение $T_x(M)\otimes T_x(M)\otimes T_x(M)\otimes T_x(M)\to\mathbb{R}$:

$$R(X_1,X_2,X_3,X_4)=(R(X_3,X_4)X_2,X_1),$$

$X_i\in T_x(M)$, $i=1,\ldots,4$, в каждой точке риманового многообразия M обладает свойствами
(1) свойством (b);
(2) свойством (c) — докажите $[\nabla_k,\nabla_l]e_q+[\nabla_l,\nabla_q]e_k+[\nabla_q,\nabla_k]e_l=0$;
(3) свойством (a) — докажите, что $([\nabla_k,\nabla_l]\xi,\xi)=0$ для любого векторного поля ξ;
а следовательно, и свойством (d).