7. Связности на векторных расслоениях (3 апреля 2003)

Связность ∇ на расслоении ξ сопоставляет гладкому векторному полю X на многообразии M^n и гладкому сечению s расслоения ξ гладкое сечение $\nabla_X(s)$ расслоения ξ так, что это сопоставление линейно по X и s и справедлива формула Лейбница $\nabla_X(fs) = f\nabla_X(s) + (Xf)s$.

1. Пусть ∇^1 и ∇^2 — связности на расслоении ξ; λ и μ — константы. Докажите, что $\lambda\nabla^1 + \mu\nabla^2$ является связностью тогда и только тогда, когда $\lambda + \mu = 1$.

2. Рассмотрим тривиальное расслоение со слоем $\mathbb{R}^n$. Сечение s задаётся набором n гладких функций $s^1, \ldots, s^n$, для которых $s(x) = \sum s^i(x)e_i(x)$. Положим $\nabla_X(s) = \sum(Xs^i)e_i$. Докажите, что эта формула задаёт связность.

3. Докажите, что сечение $\nabla_X(s)$ в точке $p \in M^n$ полностью определяется ограничениями X и s на произвольную окрестность U точки p.

4. Докажите, что на любом гладком векторном расслоении над гладким многообразием M^n есть хотя бы одна связность.

Рассмотрим тривиальное d-мерное векторное расслоение ξ над окрестностью U в $\mathbb{R}^n$. Пусть $e_1, \ldots, e_d$ — базис слоя расслоения ξ, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — базис $\mathbb{R}^n$, ∇ — произвольная связность на расслоении ξ. Определим функции $\Gamma^i_{jk}(x)$, где $i, j = 1, \ldots, d$ и $k = 1, \ldots, n$, следующим образом. Рассмотрим сечение $\nabla_{\varepsilon_j} e_k$ и разложим его по базису $e_1, \ldots, e_d$: $\nabla_{\varepsilon_k} e_j = \sum_i \Gamma^i_{jk} e_i$.

5. Докажите, что функции Γ^i_{jk} (*символы Кристоффеля*) полностью определяют связность ∇.

6. Пусть Γ^i_{jk} и $\tilde{\Gamma}^r_{st}$ — символы Кристоффеля связности на касательном расслоении многообразии M^n относительно локальных координат x и y. Докажите, что

$$\tilde{\Gamma}^r_{st} \frac{\partial x^i}{\partial y^r} = \frac{\partial x^j}{\partial y^s} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial y^t} \Gamma^i_{jk} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^s \partial y^t}.$$

7. Будем говорить, что сечение s переносится *параллельно* вдоль кривой γ, если $\nabla_{\dot\gamma}(s) = 0$ в каждой точке кривой γ. Докажите, что в локальной системе координат это условие записывается в виде системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{ds^j}{dt} + \frac{dx^i}{dt}\Gamma^j_{ki} s^k = 0, \quad j = 1, \ldots, \dim \xi.$$

Пусть на касательном расслоении многообразия M^n задана связность ∇. Кривую γ на многообразии M^n называют *геодезической* (относительно связности ∇), если $\nabla_{\dot\gamma}(\dot\gamma) = 0$ для каждой точки кривой γ. Иными словами, геодезическая определяется тем свойством, что вектор скорости параллельно переносится вдоль кривой γ.

8. Запишите уравнение геодезической в локальной системе координат (через символы Кристоффеля).

9. Докажите, что для любой точки $x \in M^n$ можно выбрать окрестность U нуля в $T_x M^n$ так, что отображение $\exp_x$ определено на U и является диффеоморфизмом окрестности нуля в касательном пространстве в точке x на окрестность точки x в многообразии M^n.

Связность на тривиальном расслоении над окрестностью U в $\mathbb{R}^n$ задаётся матрицей $\omega = (\omega^j_i)$, элементами которой служат дифференциальные 1-формы на U. Действительно, пусть $e_1, \ldots, e_d$ — базис сечений расслоения ξ, e — столбец, составленный из элементов $e_1, \ldots, e_d$. Тогда $\nabla e_i = \omega^j_i \otimes e_j$, поэтому $\nabla e = \omega \otimes e$. Матрицу ω называют *матрицей связности*.

10. Докажите, что матрица связности следующим образом связана с символами Кристоффеля: $\Gamma^i_{jk} = \omega^i_j(\varepsilon_k)$, где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — базис $\mathbb{R}^n$.

11. Рассмотрим другой набор сечений $e' = ge$, где g — матрица, элементами которой служат гладкие функции. Тогда этому набору сечений тоже соответствует матрица связности ω'. Докажите, что $\omega' = dg \cdot g^{-1} + g\omega g^{-1}$.