Задачи

M - многообразие, $C^\infty(M)$ - пространство гладких функций на M

$VectM$ - пространство гладких векторных полей на M

TM - касательное расслоение

T^*M - кокасательное расслоение

$V \to M$ - векторное расслоение над M

$\Gamma(V)$ - пространство сечений векторного расслоения $V \to M$ (в частности $\Gamma(TM)$=$VectM$)

$\Omega^p(V) = \Gamma(\Lambda^p T^*M \otimes V)$ - дифференциальные p-формы на M со значениями в V ($\Omega^0(V)$=$\Gamma(V)$)

Линейной связностью или ковариантной производной в расслоении V называется отображение ∇: $\Gamma(TM) \times \Gamma(V) \to \Gamma(V)$

$(X, s) \to \nabla_X s$, удовлетворяющее следующим условиям

$$\nabla_{fX+gY} s = f\nabla_X s + g\nabla_Y s$$

$$\nabla_X(s+t) = \nabla_X s + \nabla_X t$$

$$\nabla_X(fs) = (df)(X)s + f\nabla_X s$$

для любых векторных полей X и Y, любых сечений $s, t \in \Gamma(V)$ и любых функций f и g из $C^\infty(M)$.

Задача 1. Доказать, что формула $\nabla_X f = (df)(X)$ определяет связность в прямом произведении $V = M \times \mathbb{R}$.

Задача 2. Доказать, что линейные связности образуют аффинное пространство.

Задача 3. Доказать, что линейная связность ∇ индуцирует отображение $D : \Omega^0(V) \to \Omega^1(V)$:$D(s)(X) = \nabla_X s$, и этим отображением, в свою очередь, однозначно определяется.

Задача 4. Проверьте, что отображение D из задачи 3 однозначно продолжается до отображения де Рама D: $\Omega^p(V) \to \Omega^{p+1}(V)$ по формуле $D(\omega \otimes s) = dw \otimes s + (-1)^p w \wedge D(s)$ и свойству линейности.

Определение. Кривизной связности ∇ называется отображение $\Gamma(\Lambda^2 TM) \times \Gamma(V) \to \Gamma(V)$, которое полю бивекторов $X \wedge Y$ и сечению $s \in \Gamma(V)$ ставит в соответствие новое сечение по формуле

$$R(X \wedge Y)s = -\nabla_X\nabla_Y s + \nabla_Y\nabla_X s + \nabla_{[XY]} s.$$

Задача 5. Докажите, что выражение, стоящее в правой части, $C^\infty(M)$ - линейно.

Задача 5а. Вычислите кривизну связности из задачи 1.

Задача 6. Докажите, что $R(X \wedge Y) = (D \circ D)$, т.е. $R(X \wedge Y)\,s = D(Ds)(X \wedge Y)$

Задача 7. Правильно интерпретируйте и докажите формулу $D(D\eta) = R \wedge \eta$ для любой формы $\eta \in \Omega^p(V)$.