Основы гомологической алгебры, занятие 1.

11 февраля 2003 года.

Комплексом модулей над кольцом A называется последовательность A-модулей F^i, $i \in \mathbb{Z}$ и гомоморфизмов $d^i\colon F^i \to F^{i+1}$, для которых $d^i \circ d^{i-1} = 0$. Чтобы не возиться с индексами, часто рассматривают (считая A состоящим из элементов степени 0) градуированный A-модуль $F = \bigoplus_i F^i$ с однородным эндоморфизмом $d = \operatorname{diag}(d^i)$ степени 1, для которого d^2 (в смысле $d \circ d$) равно 0. Также положим $F_i := F^{-i}$, чтобы можно было пользоваться как верхними возрастающими, так и нижними убывающими индексами. Часто рассматриваются комплексы, у которых $F^i = 0$ для $i \gg 0$ или $i \ll 0$.

Примеры:

1) Цепной комплекс ориентированного симплициального комплекса в топологии (отсюда название «комплекс»).

2) Комплекс де Рама (поэтому d называется дифференциалом).

3) Пусть M — A-модуль. Рассмотрим его как градуированный A-модуль, сосредоточенный в степени 0, и положим $d = 0$. Таким образом, модули являются частными случаями комплексов.

4) Комплекс Козюля: пусть кольцо A коммутативно, $M = A^n$ — конечно порождённый (далее — КП) свободный A-модуль, $\bigwedge M$ — его внешняя алгебра, а $m \in M$. Тогда $\bigwedge M$ — это градуированный A-модуль, а внешнее умножение на m — его однородный эндоморфизм степени 1 с нулевым квадратом, так что у нас есть комплекс $K(m)$.

5) Свободные резольвенты:

   а) $A = k[x]$, $F_i = A$ при $i = 0, 1$, $F_i = 0$ иначе, d_1 — умножение на x;

   б) $A = k[x]/(x^2)$, $F_i = A$ при $i \geqslant 0$, $F_i = 0$ иначе, дифференциалы — умножение на x;

   в) $A = k[x, y, z]$, F — комплекс Козюля для $m = (x, y, z) \in M = A^3$.

6) Стандартная резольвента. Пусть A — алгебра над полем $\Bbbk$. Положим B_i равным тензорному произведению над $\Bbbk$ $i+2$ экземпляров A при $i \geqslant 0$, $B_i = 0$ иначе.

$$d_i(x_0 \otimes \cdots \otimes x_{i+1}) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k x_0 \otimes \cdots \otimes x_k x_{k+1} \otimes \cdots \otimes x_{i+1}.$$

1. Проверьте, что стандартная резольвента является комплексом.

Гомологиями комплекса (F, d) называются однородные компоненты $H^i(F)$ градуированного A-модуля $H(F) = \operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$ (или весь этот модуль). (Однородные) элементы модулей $\operatorname{Ker} d$ и $\operatorname{Im} d$ называются *циклами* и *границами* соответственно. Если гомологии комплекса $H^i(F)$ равны нулю, то он (или последовательность модулей) называется *точным(-ой)* (в i-м члене, если это верно лишь для конкретного i).

2. Найдите гомологии комплексов в примере 5.

Морфизмом комплексов $\varphi\colon (F, d_F) \to (G, d_G)$ называется однородный гомоморфизм модулей $\varphi\colon F \to G$ степени 0, для которого $\varphi d_F = d_G \varphi$.

3. Покажите, что морфизм комплексов индуцирует морфизм их гомологий.

4. Пусть $\varphi\colon M \to N$ — морфизм свободных A-модулей, A коммутативно. Покажите, что он индуцирует морфизм комплексов Козюля $K(m) \to K(\varphi(m))$.

Морфизм комплексов $\varphi\colon (F, d_F) \to (G, d_G)$ называется *гомотопным нулю*, если существует такой однородный гомоморфизм A-модулей $h\colon F \to G$ степени -1, что $\varphi = d_G h + h d_F$. Два морфизма комплексов называются *гомотопными*, если их разность гомотопна нулю.

5. Рассмотрим комплекс Козюля, построенный по модулю M и элементу m. Покажите, что если элемент $a \in A$ принадлежит идеалу, порождённому компонентами m, то умножение на a — гомотопный нулю морфизм комплекса Козюля (хотя бы для примера 5).

6. Покажите, что гомотопные морфизмы комплексов индуцируют одно и то же отображение в гомологиях.

7. Найдите гомологии комплекса Козюля, когда A — поле.

8. При помощи гомотопии, связанной с $h_i\colon B_i \to B_{i+1}$, $h_i(x_0 \otimes \dots \otimes x_{n+1}) = (1 \otimes x_0 \otimes \dots \otimes x_{n+1})$, найдите гомологии стандартной резольвенты (может быть полезно приписать к ней аналогичный член B_{-1}).

Последовательность комплексов и морфизмов $0 \to F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F'' \to 0$ называется *(короткой) точной (последовательностью)*, если она точна как последовательность градуированных модулей. По такой последовательности строится *связывающий гомоморфизм* $\delta\colon H(F'') \to H(F')$ степени 1: если $a'' \in \operatorname{Ker} d_{F''}$ — однородный, $\overline{a''}$ — образ a в $H(F'')$, то возьмём у a'' какой-то однородный прообраз $a \in F$. Тогда $\beta(d_F a) = d_{F''} a'' = 0$, так что по точности $d_F(a) = \alpha(b')$ для некоторого $b' \in F'$. Тогда $\alpha(d_{F'}(b')) = d_F^2(a) = 0$, и так как α — вложение, то $d_{F'}(b') = 0$, так что $b' \in \operatorname{Ker} d$. Положим $\delta(\overline{a''}) := \overline{b'} \in H(F')$.

9. Покажите, что δ корректно определён и является гомоморфизмом модулей.

10. Покажите, что получающаяся последовательность градуированных A-модулей

$$H(F') \xrightarrow{\alpha} H(F) \xrightarrow{\beta} H(F'') \xrightarrow{\delta} H(F') \xrightarrow{\alpha} H(F)$$

точна.

11. Лемма о змее: если

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\big\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

— коммутативная диаграмма модулей с точными строками, то последовательность

$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \to \operatorname{Ker}\gamma \to \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta \to \operatorname{Coker}\gamma \to 0$$

точна.

12. 5-лемма: пусть

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\
{\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle f_4}\downarrow & & {\scriptstyle f_5}\downarrow \\
B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5
\end{array}$$

— коммутативная диаграмма модулей с точными строками.

а) Покажите, что если f_2 и f_4 инъективны, а f_1 сюръективен, то f_3 инъективен.

б) Покажите, что если f_2 и f_4 сюръективны, а f_5 инъективен, то f_3 сюръективен.

Сдвигом на n комплекса F называется комплекс $F[n]$ с $F[n]^i = F^{i+n}$, $d_{F[n]} = (-1)^n d_F$.

13. Комплекс Hom'ов. Пусть F и G — комплексы. Тогда $\mathrm{Hom}(F,G)$ — это следующий комплекс абелевых групп: $\mathrm{Hom}(F,G)^i$ — это множество однородных гомоморфизмов степени i из градуированного A-модуля F в G, и $d^i_{\mathrm{Hom}(F,G)}(\varphi) = d_G \circ \varphi - (-1)^i \varphi \circ d_F$. Покажите, что это комплекс. Что представляют собой его циклы, границы и гомологии?

14. Пусть A коммутативно, M — КП свободный A-модуль, $m \in M$, $N = M \oplus Ae$ — свободный модуль ранга на 1 выше и $n = m + ae$, $a \in A$. Покажите, что сюръекция $N \twoheadrightarrow M$ порождает точную последовательность комплексов $0 \to K(m)[-1] \to K(n) \to K(m) \to 0$, и опишите соответствующий связывающий гомоморфизм.