Основы гомологической алгебры, занятие 2.
11 марта 2003 года.

Категорией $\mathcal{C}$ называется совокупность следующих данных: класс $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$, элементы которого называются объектами, для каждой пары объектов $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ множество $\operatorname{Hom}(A, B)$, элементы которого называются морфизмами из A в B, и для каждой тройки объектов $A, B, C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ закон композиции

$$\operatorname{Hom}(B, C) \times \operatorname{Hom}(A, B) \to \operatorname{Hom}(A, C), \quad (g, f) \mapsto gf.$$

При этом композиция морфизмов должна быть ассоциативна, то есть $(hg)f = h(gf)$, и для любого объекта A должен быть тождественный морфизм $\mathrm{id}_A \in \operatorname{Hom}(A, A)$, для которого $\mathrm{id}_A f = f, g\,\mathrm{id}_A = g$ для любых $f \in \operatorname{Hom}(B, A)$, $g \in \operatorname{Hom}(A, B)$ для любого объекта B. Когда надо указать категорию, мы будем писать $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Категория $\mathcal{C}$ называется *малой*, если $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ — множество. $\mathcal{C}$ — *подкатегория* категории $\mathcal{D}$, если $\operatorname{Ob}\mathcal{C} \subset \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ и $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \subset \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B)$. Если при этом $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B)$, то подкатегория называется *полной*.

Примеры категорий:

1) категория $\mathcal{S}ets$ всех множеств и отображений между ними;

2) категория топологических пространств и непрерывных отображений;

3) категория гладких многообразий и дифференцируемых отображений;

4) категория групп и их гомоморфизмов;

5) категория левых модулей над кольцом A и их гомоморфизмов;

6) категория комплексов левых модулей над кольцом A и их морфизмов.

   В этих примерах объектами были множества с дополнительной структурой, а морфизмами — отображения, согласованные с этой структурой. Другие примеры:

7) категория клеточных топологических пространств и гомотопических классов непрерывных отображений между ними (именно её изучают в курсе топологии);

8) категория комплексов левых A-модулей и их морфизмов с точностью до гомотопии, которую мы будем подробнее изучать;

9) категория, объекты которой — это вершины ориентированного графа, а морфизмы — это пути из одной вершины в другую;

10) категория из одного объекта A и с произвольной группой в качестве $\operatorname{Hom}(A, A)$ (так что категория — это обобщение понятия группы: не требуется обратимость и умножать можно не любые два морфизма);

11) категория, объекты которой — это элементы частично упорядоченного множества, а $\operatorname{Hom}(i, j)$ состоит из одного элемента, если $i \leqslant j$, и пусто иначе;

12) категория, объекты которой — это вершины ориентированного графа, а $\operatorname{Hom}(i, j)$ состоит из одного элемента, если есть путь из i в j, и пусто иначе.

Сразу укажем две конструкции над категориями. Во-первых, *двойственная категория* $\mathcal{C}^0$ — это категория с теми же объектами, что и категория $\mathcal{C}$, но $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^0}(A, B) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$, и закон композиции тоже приходит с $\mathcal{C}$. Поэтому многим утверждениям про категорию соответствуют утверждения про двойственную, получаемые «обращением стрелок».

Во-вторых, *прямое произведение категорий* $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$: $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}\times\mathcal{D})=\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\times\mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((A,X),(B,Y))=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y),$$

и композиция берётся покомпонентно.

Теперь введём функторы. *(Ковариантный) функтор* $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ — это отображение $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\to\mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, $A\mapsto F(A)$, и набор отображений $F\colon\mathrm{Hom}(A,B)\to\mathrm{Hom}(F(A),F(B))$, для которых $F(gf)=F(g)F(f)$ и $F(\mathrm{id}_A)=\mathrm{id}_{F(A)}$. *Контравариантный функтор* $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ — это функтор из $\mathcal{C}^0$ в $\mathcal{D}$. *Бифунктор* — это функтор из произведения двух категорий.

1. Что такое трифунктор, ковариантный по чётным аргументам и контравариантный по нечётным?

2. Покажите, что для любой категории $\mathcal{C}$ Hom задаёт функтор из $\mathcal{C}^0\times\mathcal{C}$ в $\mathcal{S}ets$, $(A,B)\mapsto\mathrm{Hom}(A,B)$, если положить $\mathrm{Hom}(f,g)(h)=ghf\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,Y)$, где

$$(f,g)\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0\times\mathcal{C}}((A,X),(B,Y))=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y),$$

а $h\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X)$.

Примеры функторов:

1) диаграмма, схемой которой является данный ориентированный граф, — это функтор из соответствующей графу категории примера 9, а коммутативная диаграмма — это функтор из соответствующей категории примера 12;

2) забывающие функторы из множеств с более богатой доп. структурой в множества с более бедной доп. структурой: из топологических пространств в множества, из колец в группы (аддитивная группа и группа обратимых элементов), из модулей над кольцом в абелевы группы, из многообразий в топологические пространства; тождественный функтор из категории в себя;

3) функторы $\mathrm{Hom}(\cdot,A)$ и $\mathrm{Hom}(A,\cdot)$ для каждого объекта A;

4) тензорное произведение модулей над коммутативным кольцом, симметрические и внешние степени, симметрическая и внешняя алгебра;

5) nя группа гомологий комплекса, сдвиг;

6) гомотопические группы и группы гомологий, кольцо когомологий, надстройка.

Морфизм функторов $\varphi\colon F\to G$, где $F,G\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ — это набор морфизмов $\varphi_X\in\mathrm{Hom}(F(X),G(X))$ для $X\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, для которых для любых $X,Y\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любого $f\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ $\varphi_Y F(f)=G(f)\varphi_X$. Понятным образом определяются тождественный морфизм и композиция морфизмов, а значит, и изоморфизм функторов. Пример морфизма функторов — естественное вложение векторного пространства в дважды двойственное.

3. Рассмотрим категорию коротких точных последовательностей комплексов A-модулей $0\to M\to N\to P\to 0$ (это полная подкатегория в некоторой категории диаграмм, и морфизмы в категории диаграмм — это в точности морфизмы функторов), и на ней функторы $H^i(P)$ и $H^{i+1}(M)$. Проверьте, что связывающий гомоморфизм δ — это морфизм этих функторов.

4. (Лемма Йонеды.)

а) Пусть F — функтор $\mathcal{C}\to\mathcal{S}ets$, а $F_A=\mathrm{Hom}(A,\cdot)$ для некоторого $A\in\mathcal{C}$. Постройте биекцию $F(A)$ с множеством морфизмов функтора F_A в F.

б) Покажите, что если два функтора из примера 3 изоморфны, то и соответствующие объекты изоморфны в категории.

Функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ называется *эквивалентностью категорий*, если есть такой функтор $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ (называемый *квазиобратным* к F), что композиции функторов FG и GF изоморфны тождественным функторам. Две категории называются *эквивалентными*, если между ними есть эквивалентность. Пример эквивалентности: пусть $\Bbbk$ — поле, $\overline{\Bbbk}$ — его сепарабельное замыкание, G — группа Галуа расширения $\overline{\Bbbk}/\Bbbk$ с топологией, в которой базис окрестностей нуля составляют стабилизаторы элементов $\overline{\Bbbk}$, $\mathcal{C}$ — категория конечных сепарабельных расширений $\Bbbk$ (морфизмы — вложения над $\Bbbk$), $\mathcal{D}$ — категория конечных дискретных топологических пространств с непрерывным транзитивным действием G. По основной теореме теории Галуа функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, \overline{\Bbbk})$ задаёт эквивалентность $\mathcal{C}^0 \to \mathcal{D}$ (обратный функтор сопоставляет множеству X алгебру функций $f\colon X \to \overline{\Bbbk}$, для которых $f(gx) = gf(x)$ для всех $g \in G$).

5. Покажите, что категория конечномерных векторных пространств эквивалентна своей двойственной.

6. Пусть $\mathcal{V}ect_{\mathbb{C}}$ — категория векторных пространств над $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\cdot$ — функтор из этой категории в себя, в котором умножение на комплексные числа на результате производится в первом тензорном множителе, $V \mapsto \overline{V}$ — функтор из этой категории в себя, сохраняющий аддитивную группу векторного пространства и переопределяющий умножение на комплексные числа как умножение на сопряжённые. Покажите, что функтор $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \cdot$ изоморфен функтору $V \mapsto V \oplus \overline{V}$.

Функтор (ко- или контравариантный) в категорию множеств называется *представимым*, если он изоморфен функтору из примера 3. По лемме Йонеды тогда *представляющий объект* определён однозначно с точностью до изоморфизма. Примеры: функтор на категории модулей над кольцом, сопоставляющий модулю X множество $\mathrm{Hom}(M, X) \times \mathrm{Hom}(N, X)$ для фиксированной пары модулей M, N (представляющий объект — прямая сумма) и функтор на категории абелевых групп, сопоставляющий группе множество билинейных отображений в неё из фиксированной пары A-модулей M, N (M — правый, N — левый) (представляющий объект — тензорное произведение).

Функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ называется *левым сопряжённым* к функтору $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ (а G — *правым сопряжённым* к F), если бифункторы $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\cdot), \cdot)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, G(\cdot))$ изоморфны.

7. Покажите, что сопряжённый функтор определён однозначно с точностью до изоморфизма.

8. Покажите, что сопряжённость функторов эквивалентна существованию морфизмов $FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$, для которых композиции $F \to FGF \to F$, $G \to GF \to G$ являются тождественными морфизмами функторов F и G.

9. Найдите левые сопряжённые к забывающим функторам:

а) из алгебр над полем в векторные пространства;

б) из алгебр над полем в группу обратимых элементов;

в) из групп в множества;

г) из топологических пространств в множества (здесь найдите и правый).

10. Пусть B — A-алгебра (т. е. задан гомоморфизм колец $A \to B$), F — забывающий функтор из B-модулей в A-модули. Покажите, что левый сопряжённый к F — это $B \otimes_A \cdot$, а правый сопряжённый — это $\mathrm{Hom}_A(B, \cdot)$. (B-модули, лежащие в образе первого функтора, называют *индуцированными* с A, в образе второго — *коиндуцированными*.)

11. Пусть A — S-алгебра, и образ S лежит в центре A. Покажите, что функтор $\cdot \otimes_A N$ из правых A-модулей в S-модули сопряжён слева функтору $\mathrm{Hom}_S(N, \cdot)$ из S-модулей в правые A-модули (структура левого A-модуля на N индуцирует структуру правого A-модуля на гомоморфизмах).