Основы гомологической алгебры, занятие 3.
18 марта 2003 года.

Пусть у нас есть функтор из категории модулей над кольцом в другую категорию модулей над кольцом, например, в категорию абелевых групп. Тогда он называется *аддитивным*, если переводит сумму гомоморфизмов в сумму.

1. а) Приведите счётное число примеров аддитивных и не аддитивных функторов между категориями модулей над (коммутативным) кольцом.

б) Покажите, что аддитивный функтор переводит прямую сумму двух модулей в прямую сумму, а не аддитивный не обязательно.

Аддитивный функтор F называется *точным (слева, справа)*, если для любой точной последовательности $0 \to M \to N \to P \to 0$ последовательность $0 \to F(M) \to F(N) \to F(P) \to 0$ (соотв., $0 \to F(M) \to F(N) \to F(P)$, $F(M) \to F(N) \to F(P) \to 0$) точна.

2. а) Покажите, что функтор точен слева $\Leftrightarrow$для точной последовательности $0 \to M \to N \to P$ последовательность $0 \to F(M) \to F(N) \to F(P)$ точна.

б) Покажите, что точный функтор сохраняет точность любых последовательностей.

3. а) Когда контравариантный функтор называется точным слева?

б) Покажите, что функтор Hom (в категорию абелевых групп) точен слева по каждому аргументу, но, вообще говоря, не точен.

в) Покажите, что последовательность $0 \to M \to N \to P$ точна $\Leftrightarrow$для любого модуля Q последовательность $0 \to \mathrm{Hom}(Q, M) \to \mathrm{Hom}(Q, N) \to \mathrm{Hom}(Q, P)$ точна, а также сформулируйте и докажите утверждение, получающееся обращением стрелок.

г) Покажите, что левый сопряжённый функтор точен справа, а правый сопряжённый — слева. Приведите примеры точных справа функторов.

Для точного с одной стороны функтора соответствующие последовательности можно будет продолжить дальше при помощи производных функторов, а пока мы изучим случай, когда функтор Hom оказывается точным.

4. Докажите, что следующие условия на модуль Q равносильны:

а) функтор $\mathrm{Hom}(Q, \cdot)$ точен;

б) для любого эпиморфизма $f\colon M \twoheadrightarrow N$ и гомоморфизма $h\colon Q \to N$ существует гомоморфизм $g\colon Q \to M$ с $h = fg$ (см. диаграмму);

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \\ & Q \arrow[u, "h"'] \arrow[ul, dashed, "g"] & \end{tikzcd}$$

Такие модули называются *проективными*.

5. Обратите стрелки в предыдущей задаче и докажите эквивалентность соответствующих определений *инъективного* модуля.

6. Покажите, что конечные прямые суммы и прямые слагаемые про(инъ)ективных объектов сами таковы.

7. Докажите, что модуль проективен $\Leftrightarrow$он является прямым слагаемым свободного.

8. (Критерий инъективности Бэра.) Докажите, что в определении б) инъективности достаточно ограничиться случаем, когда $f\colon I \rightarrowtail A$ — вложение левого идеала в кольцо. (Указание: воспользуйтесь леммой Цорна.)

Говорят, что в категории *достаточно много* проективных (инъективных) объектов, если любой объект является фактором проективного (подобъектом инъективного), т. е. существует соответствующий эпи(моно)морфизм.

9. а) Покажите, что модуль M над областью главных идеалов A инъективен $\Leftrightarrow$он делим, т. е. $\forall m \in M\ \forall a \in A \setminus \{0\}\ \exists m' \in M : m = am'$.

При наборе использован пакет XY-pic.

б) Покажите, что векторное пространство над $\mathbb{Q}$ — инъективная абелева группа, и что для каждого простого p группа $\sqrt[p^\infty]{1}$ корней степеней p^n, $n \in \mathbb{N}$, из единицы такова. (На самом деле любая инъективная абелева группа — (возможно, бесконечная) прямая сумма таких.)

в) Покажите, что фактор инъективной абелевой группы инъективен.

10. а) Покажите, что в категории абелевых групп достаточно много проективных и инъективных объектов. (Указание: для инъективных воспользуйтесь предыдущей задачей.)

б) Покажите, что в категории конечно порождённых абелевых групп достаточно много проективных объектов, но нет инъективных.

в) Покажите, что в категории конечных абелевых групп нет ни проективных, ни инъективных объектов.

11. а) Покажите, что модуль, индуцированный с проективного (коиндуцированный с инъективного), сам таков.

б) При помощи вложения $M \cong \mathrm{Hom}_A(A, M) \rightarrowtail \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M)$ покажите, что в категории A-модулей достаточно много инъективных объектов. А проективных?

12. Покажите, что модуль проективен $\Leftrightarrow$для любого эпиморфизма в него он отщепляется прямым слагаемым, и аналогично для инъективных модулей.

Итак, в категории A-модулей есть достаточно много проективных и инъективных объектов, так что у любого модуля M есть *проективная резольвента*, то есть комплекс $\cdots \to P_i \to P_{i-1} \cdots \to P_0$, в котором все P_i проективны, с морфизмом $P_0 \to M$, индуцирующим изоморфизм в гомологиях комплекса $P.$ с комплексом, состоящим из M в степени 0 и нулевым в остальных местах. Двойственным образом, есть инъективная резольвента.

13. Пусть $P.$ — комплекс проективных модулей с $P_i = 0$ при $i < 0$ и с $H_0(P.) = M$, а $K.$ — комплекс модулей с $K_i = 0$ при $i < 0$, $H_i(K.) = 0$ при $i > 0$ и $H_0(K.) = N$. Докажите, что любой гомоморфизм $M \to N$ продолжается до морфизма комплексов $P. \to K.$, причём единственным с точностью до гомотопии образом. Либо докажите двойственное утверждение в инъективном случае.

14. Пусть $0 \to M \to N \to P \to 0$ — точная последовательность модулей, $P(M)$ и $P(P)$ — некоторые проективные резольвенты M и P. Докажите, что существует такая проективная резольвента $P(N)$ для N и такие продолжения морфизмов $M \to N \to P$ на резольвенты, что последовательность комплексов $0 \to P(M) \to P(N) \to P(P) \to 0$ точна. Либо докажите двойственное утверждение в инъективном случае.