Основы гомологической алгебры, занятие 4.
25 марта 2003 года.

Пусть у нас есть аддитивный точный справа функтор F из категории модулей над кольцом в другую категорию модулей над кольцом, например, в категорию абелевых групп. Определим *левые производные функторы* L_iF следующим образом: пусть $P(M)$ — некоторая проективная резольвента M. Положим $L_iF(M) := H_i(F(P(M))$, а для морфизма $f\colon M \to N$ возьмём (по задаче 13 из прошлого занятия) его продолжение до морфизма резольвент, применим к морфизму резольвент F и возьмём получившийся морфизм в гомологиях. Двойственным образом определяются правые производные точного слева функтора.

(На самом деле формально предыдущее определение никуда не годится, так как функтор должен сопоставлять каждому объекту другой, определённый однозначно, а не с точностью до единственного изоморфизма, как получится при выборе разных проективных резольвент, поэтому резольвенту надо брать не какую-нибудь, а строить функториально. А именно, пусть M — A-модуль. Рассмотрим свободный A-модуль $A^{(M)}$, базисом которого являются все элементы M, и морфизм $\varepsilon\colon A^{(M)} \twoheadrightarrow M$, переводящий каждый базисный элемент в соответствующий элемент M. Затем так же накроем $\operatorname{Ker}\varepsilon$, и так далее. Если задан морфизм $\varphi\colon M \to N$, то соответствующий морфизм $A^{(M)} \to A^{(N)}$ будет переводить базисный элемент m в базисный элемент $\varphi(m)$, тогда он будет переводить $\operatorname{Ker}\varepsilon_M$ в $\operatorname{Ker}\varepsilon_N$, так что можно так же продолжить его на следующие члены резольвенты. Этот функтор называется *канонической свободной резольвентой.* Он не аддитивен как функтор в категорию комплексов, но аддитивен как функтор в гомотопическую категорию комплексов.

Для *канонической инъективной резольвенты* возьмём инъективный (как коиндуцированный с инъективного) A-модуль $F = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ и для всякого M положим $I(M) = F^{\operatorname{Hom}_A(M,F)}$ с отображением $e\colon M \to I(M)$, $e(m) = (\varphi(m))_{\varphi\in\operatorname{Hom}_A(M,F)}$. Тогда $I(M)$ тоже инъективен, как прямое произведение инъективных, а e — вложение, так как $\operatorname{Hom}_A(M,F) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, и для любого $m \in M \setminus \{0\}$ есть $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ с $\varphi(m) \neq 0$: пусть аннулятор m в $\mathbb{Z}$ есть (n), тогда возьмём гомоморфизм $\mathbb{Z}m \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, переводящий m в $1/n + \mathbb{Z}$ при $n > 0$ и в $1/3 + \mathbb{Z}$ при $n = 0$, и продолжим его с $\mathbb{Z}$-подмодуля на весь M по инъективности $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Затем так же вложим $\operatorname{Coker} e$ в инъективный модуль, и так далее. Для морфизма $f\colon M \to N$ положим

$$I(f)\colon (x_\varphi)_{\varphi\in\operatorname{Hom}_A(M,F)} \mapsto (x_{\psi\circ f})_{\psi\in\operatorname{Hom}_A(N,F)}.)$$

1. а) Докажите, что $L_iF = 0$ при $i < 0$, $L_0F = F$, а также что при выборе другой резольвенты имеется единственный естественный изоморфизм гомологий с производными функторами.

б) Как определяются левые производные контравариантного функтора?

Дадим аксиоматическое описание производных функторов. Последовательность функторов F_i с $F_i = 0$ при $i < 0$ и с морфизмом $\delta\colon F_i(P) \to F_{i-1}(M)$ для соответствующих функторов на категории коротких точных последовательностей модулей $0 \to M \to N \to P \to 0$, для которого последовательность

$$\dots \to F_i(M) \to F_i(N) \to F_i(P) \xrightarrow{\delta} F_{i-1}(M) \to \dots$$

точна, называется *δ-функтором.*

Аддитивный функтор F называется *костирающим*, если для любого M существует эпиморфизм $f\colon X \twoheadrightarrow M$, для которого $F(f) = 0$. Двойственное понятие — *стирающий* функтор.

2. Постройте δ-функтор с $F_i = L_iF$.

3. Покажите, что L_iF — костирающие при $i > 0$.

4. Покажите, что δ-функтор, в котором F_i — костирающие при $i > 0$, изоморфен δ-функтору L_iF_0.

Определим $\mathrm{Tor}_i^A(\cdot,\cdot)$ как левые производные к функтору $\cdot \otimes_A \cdot$ по первому аргументу, а $\mathrm{Ext}_A^i(\cdot,\cdot)$ — как правые производные к $\mathrm{Hom}_A(\cdot,\cdot)$ по первому аргументу.

5. Покажите, что функторы Ext и Tor являются производными и по второму аргументу.

6. а) Посчитайте Ext и Tor для конечно порождённых абелевых групп.

б) Посчитайте Ext и Tor для конечно порождённых модулей над $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$.

в) Посчитайте $\mathrm{Tor}_i^{\Bbbk[x,y,z]}(\Bbbk,\Bbbk)$, где $\Bbbk = \Bbbk[x,y,z]/(x,y,z)$ как модуль.

Модуль M называется *F-ацикличным* для точного справа функтора F, если $L_iF(M) = 0$ при $i > 0$.

7. (Ацикличная резольвента вычисляет производные функторы.) Пусть комплекс $K.$ состоит из F-ацикличных модулей, $K_i = 0$ при $i < 0$, $H_0(K.) = M$, $H_i(K.) = 0$ иначе. Покажите, что $H_i(F(K.))$ естественно изоморфно $L_iF(M)$.

8. Покажите, что следующие условия эквивалентны:

а) модуль I инъективен;

б) $\mathrm{Ext}_A^i(\cdot, I) = 0$ для всех $i > 0$;

в) $\mathrm{Ext}_A^1(A/J, I) = 0$ для любого левого идеала J в A.

Левый A-модуль M называется *плоским*, если функтор $\cdot \otimes_A M$ точен. Аналогично определяются плоские правые модули.

9. Докажите, что проективный модуль плоский и прямая сумма плоских модулей плоская.

10. (Плоскость и соотношения.) Пусть N — правый A-модуль, M — левый A-модуль, $n_1,\ldots,n_n \in N$. *Соотношение* между n_i с коэффициентами в M — это такой набор $m_1,\ldots,m_n \in M$, что $\sum n_i \otimes m_i = 0$ в $N \otimes_A M$. Покажите, что M плоский $\Leftrightarrow$для любого модуля N и любого конечного набора $n_1,\ldots,n_n$ элементов в N все соотношения между этими элементами с коэффициентами в M являются линейными комбинациями соотношений между этими элементами с коэффициентами в A, то есть для соотношения $(m_1,\ldots m_n)$ найдутся наборы $(a_{11},\ldots,a_{n1}),\ldots,(a_{1m},\ldots,a_{nm})$, $a_{ij} \in A$, и элементы $m'_1,\ldots,m'_m \in M$, для которых $\sum_i n_i a_{ij} = 0$ и $m_i = \sum_j a_{ij} m'_j$.

11. Покажите, что следующие условия эквивалентны:

а) модуль M плоский;

б) Для любого вложения $N \rightarrowtail P$ отображение $N \otimes_A M \to P \otimes_A M$ — вложение;

в) $\mathrm{Tor}_i^A(\cdot, M) = 0$ для всех $i > 0$;

г) $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$ для любого правого идеала I в A;

д) для любого конечно порождённого правого идеала $I \subset A$ отображение $I \otimes_A M \to A \otimes_A M \cong M$ — вложение.

12. Докажите, что модуль над областью главных идеалов плоский $\Leftrightarrow$у него нет кручения.