Основы гомологической алгебры, занятие 5.
1 апреля 2003 года.

Мы коснёмся приложений гомологической алгебры к искусству. Чрезвычайно велика роль гомологической алгебры в литературе: как пишет Б. И. Ярхо в работе «Методология точного литературоведения (набросок плана)», "*комплексом* является всякий объект исследования", и задача исследователя — искать "общие (гомологические) законы". Пример — следующее произведение:

Derived Functor Rap
(of a left exact functor)

Paul Bressler
October 14, 1988

This is a new rap on the oldest of stories —
Functors on abelian categories.
If the functor is left exact
You can derive it and that's a fact.
But first you must have enough injective
Objects in the category to stay active.
If that's the case — no time to loose;
Resolve injectively any way you choose.
Apply the functor and don't be sore —
The sequence ain't exact no more.
Here comes the part that is the most fun, Sir,
Take homology to get the answer.
On resolution it don't depend:
All are chain homotopy equivalent.
Hey, Mama, when your algebra shows a gap
Go over this Derived Functor Rap.

Также отметим картины Бернара Вене (Bernar Venet), на одной из которых изображено буквально вот что (см. Notices of the AMS, Vol. 49 no. 6, June/July 2002, pp. 663–668):

$$\begin{array}{ccccccccc}
G_{q-2} & \xleftarrow{\phi_{q-1}} & G_{q-1} & \xleftarrow{\phi_q} & G_q & \xleftarrow{\phi_{q+1}} & G_{q+1} & \xleftarrow{\phi_{q+2}} & G_{q+2} \\
\downarrow{\scriptstyle\psi_{q-2}} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_{q-1}} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_q} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_{q+1}} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_{q+2}} \\
G'_{q-2} & \xleftarrow{\phi'_{q-1}} & G'_{q-1} & \xleftarrow{\phi'_q} & G'_q & \xleftarrow{\phi'_{q+1}} & G'_{q+1} & \xleftarrow{\phi'_{q+2}} & G'_{q+2}.
\end{array}$$

1. Что изображено на картине? Найдите другие картины этого художника и наберите их в TEX'е.

Вернёмся к чистой гомологической алгебре. *(Левой) глобальной размерностью* кольца A называется $\sup\{i : \mathrm{Ext}^i_A(M,N) \neq 0$ для некоторых левых A-модулей $M, N\}$ (как правило, это ∞). *Проективной размерностью* $\mathrm{pd}_A M$ модуля M называется минимум длин проективных резольвент модуля M, аналогично определяется инъективная (id_A) и плоская размерность модуля.

2. Покажите, что следующие условия эквивалентны:

а) $\mathrm{id}_A M \leqslant n$;

б) в любой точной последовательности $0 \to M \to I^0 \to \dots \to I^{n-1} \to J^n \to 0$, где $I^0, \dots, I^{n-1}$ инъективны, J^n тоже инъективен;

в) $\mathrm{Ext}^{n+1}_A(A/I, M) = 0$ для любого левого идеала I в A.

Что можно сказать про проективную размерность?

3. В короткой точной последовательности модулей оцените сверху проективную размерность каждого модуля через размерности двух других. Когда эта оценка не точна?

4. а) Покажите, что глобальная размерность кольца равна супремуму инъективных размерностей модулей над ним и супремуму проективных размерностей конечно порождённых модулей над ним.

б) Найдите глобальную размерность $\mathbb{Z}$.

5. Покажите, что глобальная размерность кольца равна $0 \Leftrightarrow$ любой модуль есть прямая сумма простых (т. е. таких, у которых нет нетривиальных подмодулей) $\Leftrightarrow A$ — (конечная) прямая сумма матричных колец над телами. (Указание: воспользуйтесь леммой Шура; чему равно кольцо эндоморфизмов A как левого модуля над собой?)

Кольцо глобальной размерности $\leqslant 1$ называется *наследственным*.

6. а) Покажите, что любой комплекс проективных модулей над наследственным кольцом есть прямая сумма комплексов длины $\leqslant 1$, в которых ненулевой дифференциал инъективен.

б) Покажите, что кольцо наследственно $\Leftrightarrow$любой левый идеал в нём проективен$\Leftrightarrow$для любого комплекса $C.$ проективных модулей есть морфизм $C. \to H(C.)$, индуцирующий изоморфизм в гомологиях ($H(C.)$ имеет нулевой дифференциал).

7. (Формула универсальных коэффициентов.) Пусть $C.$ — комплекс проективных модулей над наследственным кольцом A, N — A-модуль. Покажите, что

$$H^n(\mathrm{Hom}(C., N)) \cong \mathrm{Hom}(H_n(C.), N) \oplus \mathrm{Ext}^1_A(H_{n-1}(C.), N)$$

и аналогичное верно для комплекса $M \otimes_A C.$, где M — правый A-модуль.

8. Пусть $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z}, x, y \in \mathbb{Q} \right\}$.

а) Покажите, что A нётерово справа (то есть любой правый идеал конечно порождён), но не нётерово слева.

б) Покажите, что левая глобальная размерность A равна 2, а правая — 1.

9. Пусть M — $A[X]$-модуль (A не обязательно коммутативно, но X коммутирует с A). Покажите, что $\mathrm{pd}_A M \leqslant \mathrm{pd}_{A[X]} M \leqslant \mathrm{pd}_A M + 1$, и что если $XM = 0$, то справа равенство. (Указание: рассмотрите точную последовательность $A[X]$-модулей

$$0 \to A[X] \otimes_A M \xrightarrow{1\otimes m \mapsto X\otimes m - 1 \otimes Xm} A[X] \otimes_A M \xrightarrow{1 \otimes m \mapsto m} M \to 0.)$$

10. а) Покажите, что глобальная размерность $A[X]$ на 1 больше глобальной размерности A.

б) Чему равна глобальная размерность $\mathbb{Z}[X, Y, Z]$?