Основы гомологической алгебры, занятие 6.
15 апреля 2003 года.

Мы коснёмся дальнейших свойств функторов Tor и Ext, которыми и объясняются их названия.

1. Пусть A — коммутативное целостное кольцо.

а) Покажите, что поле частных K кольца A — это плоский A-модуль.

б) Покажите, что для любого A-модуля M $\operatorname{Tor}_1^A(M, K/A)$ — это подмодуль кручения в M, т. е. множество всех элементов M с нетривиальным аннулятором. Tor и происходит от слова «torsion»— кручение.

2. (Кратность пересечения по Серру.) Пусть X и Y — подмногообразия в $\mathbb{A}^n$ размерностей d и $n-d$, заданные идеалами I и J, и предположим, что начало координат — изолированная точка пересечения. В алгебраической геометрии важно определить «кратность пересечения $i(X,Y;0)$ многообразий X и Y в нуле» с требуемыми хорошими свойствами. Если X и Y гладки в нуле, то это нетрудно — правильным ответом оказывается размерность векторного пространства $R/IR \otimes_R R/JR = R/(I+J)R$, где R — кольцо формальных степенных рядов $\Bbbk[[x_1,\dots,x_n]]$, описывающее локальное поведение $\mathbb{A}^n$ в нуле. Для плоских кривых эта формула тоже годится, но вообще размерность $R/(I+J)R$ — это лишь первый член суммы. Следующее определение дал Ж.-П. Серр в «Локальной алгебре и теории кратностей» (1957):

$$i(X,Y;0) := \sum_j (-1)^j \dim_{\Bbbk} \operatorname{Tor}_j^R(R/IR, R/JR).$$

Покажите, что $\operatorname{Tor}_j^R(R/IR, R/JR)$ аннулируется $I+J$, так что конечномерен. Пусть $n=4$, $I=(x_1,x_2)\cap(x_3,x_4)$ — идеал пары плоскостей, пересекающихся в 0, $J=(x_1-x_3, x_2-x_4)$ — идеал ещё одной плоскости. Посчитайте кратность пересечения. Заметим, что Y пересекает обе плоскости трансверсально в одной точке, так что кратность должна быть равна 2, а размерность $R/(I+J)R$ — не 2.

3. Пусть R — коммутативное кольцо, $I \subset R$ — идеал. Покажите, что $\operatorname{Ext}^1(R/I, R/I) = \operatorname{Hom}_R(I/I^2, R/I)$. Когда R — координатное кольцо многообразия X, а I — идеал подмногообразия Y, то правая часть соответствует нормальному расслоению к Y в X.

4. Покажите, что

$$\begin{aligned}\operatorname{Ext}^n_A(M,N) = \operatorname{Hom}(P(M), N[n]) = \operatorname{Hom}(P(M), P(N)[n]) = \\ = \operatorname{Hom}(P(M), I(N)[n]) = \operatorname{Hom}(I(M), I(N)[n]),\end{aligned}$$

где P — проективные, I — инъективные резольвенты, а гомоморфизмы берутся в гомотопической категории (может пригодиться задача про комплекс Hom'ов). Выведите отсюда существование ассоциативного умножения $\circ\colon \operatorname{Ext}^n(N,P)\times\operatorname{Ext}^m(M,N)\to\operatorname{Ext}^{m+n}(M,P)$. В частности, $\operatorname{Ext}^*(M,M)$ имеет структуру градуированной ассоциативной алгебры с 1.

5. (Ext по Йонеде.) Пусть

$$E = (0\to N\to Z_n\to\cdots\to Z_1\to M\to 0)$$

— точная последовательность. Тогда тождественное отображение M единственным с точностью до гомотопии образом продолжается до морфизма $P(M)\to E$. Рассмотрим морфизм комплексов $\varphi\colon P(M)\to N[n]$, являющийся соответствующей компонентой этого морфизма. Покажите, что он определён однозначно с точностью до гомотопии (и если вместо проективной резольвенты для M взять инъективную для N, то получится то же самое), так что корректно задаёт элемент в $\operatorname{Ext}^n(M,N)$, и что если

$$E' = (0\to P\to Y_m\to\cdots\to Y_1\to N\to 0)$$

— другая точная последовательность, то произведение элементов Ext'ов, соответствующих E и E', есть $(-1)^{mn}$ умножить на класс, соответствующий последовательности

$$0 \to P \to Y_m \to \cdots \to Y_1 \xrightarrow{N} Z_n \to \cdots \to Z_1 \to M \to 0.$$

Как надо подправить знак у сопоставления точным последовательностям элементов Ext, чтобы оно было перестановочно с композицией?

Подправленный таким образом элемент будет обозначать $[E]$.

6. Покажите, что элемент $\mathrm{Ext}^0(M,N)$, соответствующий классу точной последовательности $0 \to N \xrightarrow{f} M \to 0$, есть f^{-1}.

7. Пусть E и E' — две точные последовательности

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Z_n & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle g} & & \big\downarrow & & & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \\
0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & Z'_n & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Z'_1 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

связанные морфизмом. Покажите, что тогда $g \circ [E] = [E'] \circ f$ в $\mathrm{Ext}^n_A(M, N')$.

8. Покажите, что если E — точная последовательность как выше, $u\colon M' \to M$ — гомоморфизм, то $[E] \circ u$ — это класс точной последовательности

$$0 \to N \to Z_n \to \cdots \to Z_2 \to Z_1 \times_M M' \to M' \to 0,$$

где расслоенное произведение $Z_1 \times_M M' := \{(x,m) \in Z_1 \times M' |$ образ x в M равен $u(m)\}$. Сформулируйте и докажите двойственное утверждение.

9. а) Покажите, что при $n \geqslant 1$ любой элемент в $\mathrm{Ext}^n_A(M,N)$ есть класс некоторой точной последовательности, и два таких класса равны $\Leftrightarrow$ есть третья точная последовательность и морфизмы из неё в первые две, тождественные на граничных модулях $\Leftrightarrow$двойственное утверждение.

б) Как описание равенства упрощается для Ext^1?

в) Постройте точную последовательность $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(64) \to \mathbb{Z}/(1024) \to 0$ и опишите соответствующий элемент в $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/(1024), \mathbb{Z})$.

10. Опишите, как по двум точным последовательностям построить третью, класс которой есть сумма классов первых двух. (Указание: сначала рассмотрите прямую сумму.)

11. Пусть $E = (0 \to M' \to M \to M'' \to 0)$ — точная последовательность модулей, N — ещё один модуль.

а) Покажите, что связывающий гомоморфизм $\mathrm{Ext}^n(N, M'') \to \mathrm{Ext}^{n+1}(N, M')$ есть умножение слева на $[E]$.

б) Покажите, что связывающий гомоморфизм $\mathrm{Ext}^n(M', N) \to \mathrm{Ext}^{n+1}(M'', N)$ есть умножение справа на $(-1)^{n+1}[E]$.

в) Как определить $[E]$ для короткой точной последовательности через связывающий гомоморфизм?

г) Докажите, что для короткой точной последовательности $[E] = 0 \Leftrightarrow E$ расщепляется, т. е. морфизмы есть вложение на прямое слагаемое и проекция на другое.

Теперь перейдём к конусам морфизмов. *Конусом* морфизма комплексов $\varphi\colon F. \to G.$ называется комплекс $C(\varphi).$ с

$$C(\varphi)_i = G_i \oplus F_{i-1}, \quad d_{C(\varphi)} = \begin{pmatrix} d_G & \varphi \\ 0 & -d_F \end{pmatrix}.$$

12. Покажите, что это комплекс, что имеется точная последовательность комплексов $0 \to G. \to C(\varphi). \to F[1] \to 0$ и что соответствующий этой последовательности связывающий гомоморфизм на гомологиях есть $H(\varphi)$.

Морфизм комплексов называется *квазиизоморфизмом* (гомологизмом у Бурбаки), если он индуцирует изоморфизм в гомологиях.

13. Покажите, что морфизм — квазиизоморфизм $\Leftrightarrow$его конус не имеет гомологий и что морфизм — гомотопическая эквивалентность $\Leftrightarrow$его конус стягиваем, т. е. тождественный морфизм конуса гомотопен нулю.

Двойным комплексом называется биградуированный A-модуль с двумя коммутирующими дифференциалами d_{hor} и d_{vert} степеней $(1,0)$ и $(0,1)$ соответственно, квадраты которых равны 0. *Ассоциированным простым комплексом* или *свёрткой* двойного комплекса $C..$ называется комплекс $s(C..)$ с

$$s(C..)_k = \bigoplus_{i+j=k} C_{ij}, \quad d_{s(C..)} = d_{\mathrm{hor}} + (-1)^i d_{\mathrm{vert}}.$$

14. Покажите, что конус морфизма — это частный случай свёртки.