Основы гомологической алгебры, занятие 7.
22 апреля 2003 года.

Спектральная последовательность — это последовательность (биградуированных) модулей E_r (листов) для $r \geqslant 1$ (иногда $\geqslant 0$) с дифференциалом d_r (бистепени $(r, 1-r)$), $d_r^2 = 0$, в которой $E_{r+1} = H(E_r)$ — модулю гомологий. Определим подмодули

$$0 = B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_r \subset \dots \subset Z_r \subset \dots \subset Z_2 \subset Z_1 = E_1,$$

для которых $E_r = Z_r/B_r$: положим $Z_1 = E_1$, $B_1 = 0$, далее по индукции за Z_{r+1} возьмём прообраз ядра d_r при проекции $Z_r \twoheadrightarrow E_r$, а за B_{r+1} прообраз образа d_r при той же проекции. Затем положим $Z_\infty = \bigcap_r Z_r$, $B_\infty = \bigcup_r B_r$ и *предел* спектральной последовательности $E_\infty = Z_\infty/B_\infty$. Говорят, что спектральная последовательность *вырождается в rм члене*, если $E_r = E_\infty$.

Хороший способ строить спектральную последовательность — спектральная последовательность точной пары. *Точная пара* — это точная последовательность

$$A \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} E \xrightarrow{\gamma} A \xrightarrow{\alpha} A$$

(биградуированных) модулей и (биоднородных какой-то степени) гомоморфизмов. Тогда $d = \beta\gamma\colon E \to E$ имеет нулевой квадрат, так что можно взять гомологии HE. *Производной точной парой* называется точная пара

$$\operatorname{Im}\alpha \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Im}\alpha \xrightarrow{\beta\circ\alpha^{-1}} HE \xrightarrow{\gamma} \operatorname{Im}\alpha \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Im}\alpha.$$

1. Покажите, что производная точная пара — точная пара.

По индукции определяется n-я производная точная пара

$$\operatorname{Im}\alpha^n \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Im}\alpha^n \xrightarrow{\beta\circ\alpha^{-n}} H^nE \xrightarrow{\gamma} \operatorname{Im}\alpha^n \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Im}\alpha^n,$$

и спектральная последовательность точной пары — это $E_r = H^{r-1}E$ с дифференциалом из определения точной пары как выше.

2. Найдите Z_r и B_r в спектральной последовательности точной пары и покажите, что если $\operatorname{Ker}\alpha^{r+1} = \operatorname{Ker}\alpha^r$, то спектральная последовательность точной пары вырождается в r-м члене.

Точную пару обычно строят так. Пусть C — комплекс, $\alpha\colon C \rightarrowtail C$ — мономорфизм комплексов. Тогда точная последовательность комплексов $0 \to C \xrightarrow{\alpha} C \to \operatorname{Coker}\alpha \to 0$ индуцирует точную пару полных гомологий $HC \to HC \to H\operatorname{Coker}\alpha \to HC$, и соответствующую спектральную последовательность мы назовём *спектральной последовательностью α на C*.

3. Покажите, что в спектральной последовательности α на C Z_r — это образ $H\operatorname{Coker}\alpha^r$ в $H\operatorname{Coker}\alpha$ при естественной проекции, B_r — образ ядра действия α^{r-1} на HC при естественной проекции и что если $z \in C$ — представитель класса $\overline{z} \in E_r$, проектирующийся в цикл в $\operatorname{Coker}\alpha^r$, то $\alpha^{-r}dz$, где d — дифференциал C, лежит в классе $d_r\overline{z}$.

4. Пусть $C = (0 \to \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{(p,0)} \mathbb{Z} \to 0)$, α — умножение на p. Найдите в спектральной последовательности α на C E_r, d_r, E_∞.

Основной пример этого — спектральная последовательность фильтрованного комплекса. Пусть $G^\cdot \supset \dots \supset F_p(G^\cdot) \supset F_{p+1}(G^\cdot) \supset \dots$ — фильтрация семейством подкомплексов в $G^\cdot$. Положим $C = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} F_p(G^\cdot)$, за α возьмём сумму вложений $F_{p+1}(G^\cdot) \rightarrowtail F_p(G^\cdot)$. Биградуировка на C берётся такая: $C^{p,q} = F_p(G^{p+q})$. Тогда в спектральной последовательности $E_1 = H(\operatorname{gr} G^\cdot)$, где $\operatorname{gr} G^\cdot = \bigoplus_p F_p(G^\cdot)/F_{p+1}(G^\cdot)$ — ассоциированный градуированный комплекс. Из предыдущего видно, что однородные по p компоненты циклов и границ таковы (деление выполняется после сложения):

$$Z_r^p = \{a \in F_p(G^{\cdot}) | da \in F_{p+r}(G^{\cdot})\} + F_{p+1}(G^{\cdot}) \Big/ dF_p(G^{\cdot}) + F_{p+1}(G^{\cdot}),$$
$$B_r^p = (dF_{p-r+1}(G^{\cdot}) \cap F_p(G^{\cdot})) + F_{p+1}(G^{\cdot}) \Big/ dF_p(G^{\cdot}) + F_{p+1}(G^{\cdot}).$$

5. Найдите в соответствующей точной паре бистепени $\alpha, \beta, \gamma, d_r$.

В случае фильтрованного комплекса можно сказать больше. На $HG^{\cdot}$ есть убывающая фильтрация образами $HF_p(G^{\cdot}) \to HG^{\cdot}$, и тогда ассоциированный градуированный модуль $\operatorname{gr} HG^{\cdot}$ — это подфактор в E_∞ (Z обозначает циклы комплекса):

$$(\operatorname{gr} HG^{\cdot})^p = Z(F_p(G^{\cdot})) \Big/ (dG^{\cdot} + F_{p+1}(G^{\cdot})) \cap Z(F_p(G^{\cdot})) =$$
$$= Z(F_p(G^{\cdot})) + F_{p+1}(G^{\cdot}) \Big/ (dG^{\cdot} \cap F_p(G^{\cdot})) + F_{p+1}(G^{\cdot}),$$

и в последней дроби фактор числителя по $dF_p(G^{\cdot}) + F_{p+1}(G^{\cdot})$ лежит в Z_∞^p, а фактор знаменателя содержит B_∞^p. Если $\operatorname{gr} HG^{\cdot} = E_\infty$ (то есть эти факторы равны Z_∞^p и B_∞^p соответственно), то говорят, что спектральная последовательность фильтрованного комплекса *слабо сходится*, а если вдобавок пересечение всех членов фильтрации на $HG^{\cdot}$ равно нулю, то говорят, что она *сходится*, и пишут $E_r \Rightarrow HG^{\cdot}$. В этом основная польза спектральных последовательностей.

6. Пусть $R = \Bbbk[[x,y]]$, а $F_p(R)$ — идеал, порождённый многочленами степени p. Для R-модуля M положим $F_p(M) = F_p(R)M$. Для $M = R/(x^2)$, $N = R/(xy+y^3)$ постройте при помощи фильтрации на свободной резольвенте спектральную последовательность с $E_1 = \operatorname{Tor}^{\operatorname{gr} R}(\operatorname{gr} M, \operatorname{gr} N)$, напишите все её члены и покажите, что она сходится к $\operatorname{Tor}^R(M,N)$.

7. Пусть $f\colon C^{\cdot} \to D^{\cdot}$ — морфизм фильтрованных комплексов (т. е. образ члена фильтрации лежит в члене с тем же номером). Покажите, что f индуцирует морфизм спектральных последовательностей. Пусть фильтрации таковы, что $\forall n\ \exists p,q:\ F_p(C^n) = C^n, F_q(C^n) = 0$ и то же для $D^{\cdot}$. Покажите, что тогда последовательности сходятся, и если f индуцирует изоморфизм на каком-либо листе спектральных последовательностей, то это верно и для следующих (вплоть до ∞) листов, и f — квазиизоморфизм.

Подобно тому, как игла находится в яйце, яйцо в утке, а утка в зайце, важный способ строить фильтрованные комплексы — это двойные комплексы. На свёртке двойного комплекса $C^{\cdot\cdot}$ есть горизонтальная и вертикальная фильтрации $F_p^{\mathrm{hor}}(C^{\cdot\cdot}) = \bigoplus_{q \geqslant p} C^{*,q}$, $F_p^{\mathrm{vert}}(C^{\cdot\cdot}) = \bigoplus_{q \geqslant p} C^{q,*}$. Тогда $\operatorname{gr}^{\mathrm{vert}} s(C^{\cdot\cdot}) = s(C^{\cdot\cdot})$ с дифференциалом $(-1)^i d^{\mathrm{vert}}$, так что $E_1 = H^{\mathrm{vert}} C^{\cdot\cdot}$.

8. Покажите, что для вертикальной фильтрации введённая выше на E_1 биградуировка совпадает с индуцированной с биградуировки $C^{\cdot\cdot}$ (для горизонтальной она отличается перестановкой индексов), и что спектральная последовательность (вертикальной фильтрации) двойного комплекса сходится, если комплекс ограничен снизу или справа ($C^{i,j} = 0$ при всех $i \gg 0$ или при всех $j \ll 0$): $E_2 = H^{\mathrm{hor}} H^{\mathrm{vert}} C^{\cdot\cdot} \Rightarrow Hs(C^{\cdot\cdot})$. Когда сходится последовательность горизонтальной фильтрации?

9. (5-членная точная последовательность.) Пусть имеется (вертикальная) спектральная последовательность двойного комплекса первого квадранта, то есть в котором $C^{ij} = 0$ при $i < 0$ или $j < 0$. Обозначим $H^i(s(C^{\cdot\cdot}))$ за H^i. Покажите, что $H^0 \cong E_2^{0,0}$, имеются естественные отображения $E_2^{i,0} \to H^i \to E_2^{0,i}$ и точная последовательность

$$0 \to E_2^{1,0} \to H^1 \to E_2^{0,1} \to E_2^{2,0} \to H^2.$$

10. Пусть $C^\cdot$ — ограниченный слева комплекс. Покажите, что существует двойной комплекс инъективных модулей $I^{p,q}$ с морфизмом $C^\cdot \to I^{\cdot,0}$, в котором $I^{*,q}$ — инъективная резольвента C^q, а $H^{\mathrm{vert}}(I^{\cdot\cdot})^{*,q}$ — инъективная резольвента $H^q(C^\cdot)$. Этот двойной комплекс называется *резольвентой Картана–Эйленберга* для $C^\cdot$. Покажите, что тогда $C^\cdot \to s(I^{\cdot\cdot})$ — квазиизоморфизм. (Указание: примените задачу 14 из занятия 3.)

Теперь мы поместим зайца в сундук — спектральную последовательность композиции производных функторов. Пусть $F\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$, $G\colon \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_3$ — точные слева функторы между категориями модулей, и F переводит инъективные объекты в G-ацикличные. Тогда беря для $M \in \mathcal{C}_1$ инъективную резольвенту $I^\cdot$, а для $F(I^\cdot)$ — резольвенту Картана–Эйленберга $J^{\cdot\cdot}$, получаем, что в вертикальной спектральной последовательности двойного комплекса $G(J^{\cdot\cdot})$ $E_2^{p,q} = R^pG \circ R^qF(M) \Rightarrow H^{p+q}(sG(J^{\cdot\cdot})) = R^{p+q}(G\circ F)(M)$, где последнее равенство получается, скажем, из рассмотрения горизонтальной спектральной последовательности. Пример: пусть $A \to B$ — гомоморфизм колец, M — A-модуль, N — B-модуль. Тогда есть спектральная последовательность с $E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_B(N, \mathrm{Ext}^q_A(B,M)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_A(N,M)$, так как модуль, коиндуцированный с инъективного, инъективен, и спектральная последовательность с $E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_B(\mathrm{Tor}^A_q(B,M),N) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_A(M,N)$.

11. Пусть M — A-модуль, F — точный слева функтор на категории A-модулей, $C^\cdot$ — какая-то резольвента M вправо. Покажите, что есть спектральная последовательность с $E_1^{p,q} = R^qF(C^p) \Rightarrow R^{p+q}F(M)$.

Ещё один пример — спектральная последовательность Линдона–Серра: пусть $A = \mathbb{Z}[G]$ — групповая алгебра группы G над $\mathbb{Z}$. Тогда A-модули называют G-модулями. Рассмотрим на категории G-модулей функтор $M \mapsto M^G$ — множество неподвижных точек в M. Тогда этот функтор есть $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},M)$, где $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[G]/(\{g-1 | g\in G\})$ — модуль с тривиальным действием, так что этот функтор точен слева, и его производные — это $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)$, обозначаемые $H^i(G,M)$ и называемые когомологиями G с коэффициентами в M. Группы $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M) =: H_q(G,M)$ называются гомологиями G с коэффициентами в M. Когда говорят об индуцированных и коиндуцированных G-модулях, то по умолчанию подразумевают (ко)индуцирование с $\mathbb{Z}$-модулей.

12. Покажите, что гомологии с положительными номерами с коэффициентами в индуцированном модуле равны 0, и справедливо двойственное утверждение, а также что любой модуль — подмодуль коиндуцированного и фактор индуцированного.

13. Покажите, что если стандартную резольвенту групповой алгебры тензорно домножить на тривиальный G-модуль $\mathbb{Z}$, то получится $\mathbb{Z}[G]$-свободная резольвента $\mathbb{Z}$. Выведите отсюда, что когомологии $H^q(G,M)$ — это когомологии комплекса абелевых групп $C^\cdot(G,M)$, в котором $C^n(G,M)$ — все функции из G^n в M $(G^0 = \{1\})$, а дифференциал задаётся формулой

$$df(g_0,g_1,\ldots,g_n) = g_0f(g_1,\ldots,g_n) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_0,\ldots,g_{i-1}g_i,\ldots,g_n) + (-1)^{n+1}f(g_0,\ldots,g_{n-1}).$$

Аналогично опишите гомологии.

Гомологии и когомологии групп можно определить и в топологических терминах: пусть $X = K(G,1)$ — пространство Эйленберга–Маклейна, тогда G-модуль задаёт локальную систему на X (при тривиальном действии G — просто группу коэффициентов), и (ко)гомологии G — это (ко)гомологии X с коэффициентами в этой локальной системе (в частности, $H_1(G,\mathbb{Z}) = G/G'$). Это следует из того, что $K(G,1)$ можно описать как фактор стягиваемого пространства по свободному действию группы G, например — результата приклеивания к каждой упорядоченной n-ке не обязательно различных точек группы G с дискретной топологией $(n-1)$-мерного симплекса. Перестановочные с действием G клеточные n-коцепи на этом CW-комплексе задаются своими (произвольными) значениями на $(1, g_1, g_1g_2, \ldots, g_1\ldots g_n)$, что даёт комплекс $C^\cdot(G,M)$. В частности, если G-модуль — кольцо, а G действует автоморфизмами, то в когомологиях имеется умножение (алгебраическое описание можно найти в гл. IV «Алгебраической теории чисел» под ред. Дж. Касселса и А. Фрёлиха (М., Мир, 1969) или у Бурбаки (§7, упр. 7, 10 г))).

14. Покажите, что если $|G| = n$, то гомологии и когомологии с положительными номерами аннулируются n.

15. Покажите, что для конечной группы индуцированные и коиндуцированные модули — это одно и то же.

Пусть H — нормальная подгруппа в G. Тогда $M^G = (M^H)^{G/H}$. Как задать действие G/H на когомологиях?

16. Покажите, что коиндуцированный G-модуль коиндуцирован и как H-модуль, так что G/H действует на $H^q(H, M)$, посчитанных при помощи G-коиндуцированной резольвенты.

17. Покажите, что $M \mapsto M^H$ переводит коиндуцированные G-модули в коиндуцированные G/H-модули, так что имеется спектральная последовательность Линдона–Серра

$$E_2^{p,q} = H^p(G/H, H^q(H, M)) \Rightarrow H^{p+q}(G, M).$$

(Топологически это факторизация универсального накрытия $K(G, 1)$ сначала по H, а потом по G/H, так что если M — кольцо, то на спектральной последовательности есть и мультипликативная структура.)

18. Пусть A, B — G-модули, тогда $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ тоже является G-модулем: $(g\varphi)(x) = g\varphi(g^{-1}x)$. Покажите, что $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)^G$ и имеется точная последовательность

$$0 \to H^1(G, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G]}(A, B) \to H^0(G, \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, B)) \to H^2(G, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)) \to \dots$$

Для конечной группы рассмотрим $N = \sum_{g \in G} g \in \mathbb{Z}[G]$, тогда умножение на N в G-модуле M факторизуется до гомоморфизма $H_0(G, M) \xrightarrow{N_0} H^0(G, M)$. Определим *группы когомологий Тэйта*, положив $\hat{H}^i(G, M) = H^i(G, M)$ при $i > 0$, $\hat{H}^i(G, M) = H_{-1-i}(G, M)$ при $i < -1$, $\hat{H}^0(G, M) = \mathrm{Coker}\, N_0$, $\hat{H}^{-1}(G, M) = \mathrm{Ker}\, N_0$. Тогда все группы Тэйта аннулируются $|G|$.

19. Покажите, что для индуцированного G-модуля все группы Тэйта равны нулю.

20. Покажите, что для короткой точной последовательности G-модулей имеется длинная точная последовательность гомологий Тэйта, бесконечная в обе стороны.

21. Пусть G циклическая. Покажите, что группы Тэйта $\hat{H}^q(G, M)$ зависят только от чётности q.

22. Покажите, что если для любого p в G есть силовская p-подгруппа G_p, для которой $\hat{H}^i(G_p, M) = 0$, то $\hat{H}^i(G, M) = 0$. (Указание: сведите всё к случаю $i = 0$.)

Модуль M называется *когомологически тривиальным*, если $\hat{H}^q(H, M) = 0$ для всех $q \in \mathbb{Z}$ и всех подгрупп H в G.

23. Покажите, что это условие достаточно проверить для двух q подряд. (Указание: воспользуйтесь двумя предыдущими задачами и спектральной последовательностью Линдона–Серра.)

Последняя задача возникла в приложениях когомологий групп к арифметике (теории полей классов), где с её помощью Тэйт доказал, что если K — конечное расширение поля p-адических чисел, а L/K — конечное расширение Галуа с группой G, то $\hat{H}^i(G, L^*) = \hat{H}^{i-2}(G, \mathbb{Z})$, зная лишь $H^1(G, L^*) = 0$ (это утверждение называется теоремой 90 Гильберта) и $H^2(G, L^*)$. Упомянем также теорему о нормальном базисе: аддитивная группа L — индуцированный G-модуль.

Ещё один важный производный функтор, о котором в курсе ничего не сказано, — это когомологии пучков в алгебраической геометрии. Литературные указания есть в Гельфанде–Манине.