Лекция 5. Спектры колец.

Любому аффинному алгебраическому многообразию X, определенному над алгебраически замкнутым полем k, можно сопоставить алгебру $k[X]$, состоящую из регулярных функций на X. Более того, по $k[X]$ однозначно (с точностью до изоморфизма) восстанавливается само многообразие X. При этом точки $x \in X$ взаимно однозначно соответствуют максимальным идеалам в $k[X]$ (докажите!). Оказывается, что аналог многообразия X можно сопоставить любому коммутативному кольцу с единицей R.

Определение. *Спектром* $\mathrm{Spec}R$ кольца R называется множество его простых идеалов.

Если задан гомоморфизм колец $f: R \to S$, то он индуцирует отображение спектров в обратном направлении $f^a : \mathrm{Spec}S \to \mathrm{Spec}R$: каждому простому идеалу $\mathfrak{p} \subset S$ надо сопоставить его прообраз $f^{-1}(\mathfrak{p}) \subset R$ (если бы мы определяли спектр, как множество максимальных идеалов, то данное отображение не было бы определено). Такие отображения спектров называются *морфизмами*.

Пример. Пусть K — произвольное (не обязательно алгебраически замкнутое) поле, а $f_1, \ldots, f_m \in K[x_1, \ldots, x_n]$ — многочлены, задающие некоторый идеал I в $K[x_1, \ldots, x_n]$. Несмотря на то, какое множество данные многочлены задают в $\mathbb{A}^n_K$, спектр $\mathrm{Spec}K[x_1, \ldots, x_n]/I = X$ всегда будет непуст. При этом морфизмы $\mathrm{Spec}L \to X$ будут соответствовать решениям системы $\{f_1 = 0, \ldots, f_m = 0\}$ в L, где L — некоторое конечное расширение K.

На $\mathrm{Spec}R$ можно ввести топологию подобно тому, как это делалось для аффинных алгебраических многообразий.

Определение. *Замкнутыми в топологии Зариского* являются подмножества в $\mathrm{Spec}R$, имеющие вид $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R | \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$, где $\mathfrak{a} \subset R$ некоторый идеал.

Точке спектра $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$ можно сопоставить ее поле вычетов, обозначаемое $k(\mathfrak{p})$, являющееся полем частных целостного кольца $R/\mathfrak{p}$. При этом элементы кольца $f \in R$ можно воспринимать как функции на точках спектра $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$ со значениями $f(\mathfrak{p}) = f(\mathrm{mod}\mathfrak{p}) \in k(\mathfrak{p})$. Таким образом, $V((f))$ в точности является множеством, состоящем из тех точек, где $f \in R$ равна нулю.

Так как все определенные ранее понятия имели алгебраическую переформулировку, то их можно определить и для спектров.

Определение. Спектр $\mathrm{Spec}R$ называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде объединения двух замкнутых подмножеств или, что равносильно, если кольцо R целостно. *Полем* *рациональных функций* на неприводимом спектре называется поле частных кольца R.

Определение. Пусть $S \subset R$ некоторое подмножество в кольце, замкнутое относительно умножения и не содержащее нуля. Тогда *локализацией* $S^{-1}R$ кольца R относительно S называется множество дробей

$$\{\frac{f}{s}|f \in R, s \in S\}$$

с естественно введенной на нем структурой кольца. Например, если R целостно, а $S = R \setminus \{0\}$, то $S^{-1}R$ является просто полем частных R.

Определение. *Локальным кольцом* $\mathcal{O} = R_\mathfrak{p}$ в точке $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$ называется локализация $S^{-1}R$, где $S = R \setminus \mathfrak{p}$. Это кольцо содержит ровно один максимальный идеал $\mathfrak{m}$ (порождаемый образом $\mathfrak{p}$ при локализации), а значит является, по определению, *локальным кольцом.* В случае неприводимого спектра оно в точности является множеством, состоящем из тех рациональных функций, которые регулярны в точке $\mathfrak{p}$. *Касательным пространством Зариского* в точке $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$ называется линейное пространство над $k(\mathfrak{p})$ определяемое, как $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$. *Пополненным локальным кольцом* называется проективный (обратный) предел $\lim\limits_{\leftarrow} \mathcal{O}/\mathfrak{m}^i$.

Заметим, что морфизм спектров $X \to Y$, преводящий точку $x \in X$ в точку $y \in Y$ индуцирует гомоморфизм локальных колец $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$, а также вложение полей вычетов $k(y) \subset k(x)$.

Определение. *Размерностью Крулля* $\dim R = \dim \mathrm{Spec}R$ называется длина максимальной цепочки простых идеалов в кольце R:

$$\dim R = \max\{i|\exists \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_i \subset R\}.$$

Определение. Точка $\mathfrak{p} \in R$ называется *регулярной*, *гладкой* или *простой*, если $\dim R_\mathfrak{p} = \dim_{k(\mathfrak{p})}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$.

Утверждение 5.1. Пусть R нетерово кольцо и $\dim R < \infty$. Тогда $\dim R[x] = \dim R + 1$.

Заметим, что спектр поля $\mathrm{Spec}K$ состоит всего лишь из одного элемента. Из-за этого не стоит смущаться — идея спектров как раз и заключается в том, что функции на множестве (поле K) несут о нем больше информации, чем само множество (одна точка). В частности, у спектров колец может быть гораздо больше морфизмов (соответствующих, по определению, гомоморфизмам колец), чем непрерывных отображений у топологических пространств, соответствующих этим спектрам.

Рассмотрим расширение полей $K \subset L$. Оно определяет морфизм спектров $\mathrm{Spec}L \to \mathrm{Spec}K$. Множество морфизмов $\mathrm{Spec}L \to \mathrm{Spec}L$, коммутирующих с морфизмами в $\mathrm{Spec}K$, является, по определению, группой $\mathrm{Aut}_K L$.

Пусть теперь X и Y — два линейно связных топологических пространства, $p : X \to Y$ накрытие. Выберем $y \in Y$ и $x \in p^{-1}(y)$. Можно поднять петлю $\gamma \in \pi_1(Y)$ с началом и концом в y до пути $\widetilde{\gamma}$ в X с началом в x. Его конец будет некоторой точкой из слоя $x_\gamma \in p^{-1}(y)$. Таким образом получается биекция $[\pi_1(Y) : p(\pi_1(X))] \sim p^{-1}(y)$ множества смежных классов со слоем.

Утверждение 5.2. Индуцированное отображение $p : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ является вложением. Имеется взаимно однозначное соответствие между подгруппами конечного индекса в $\pi_1(Y)$ и накрытиями Y.

Пусть теперь $f : X \to X$ — гомеоморфизм X, коммутирующий с p.

Утверждение 5.3. Автоморфизм f однозначно определяется своим действием на любой точке $x \in X$. Группа $\mathrm{Aut}_Y X$ действует (свободно) транзитивно на слое тогда и только тогда, когда $\pi_1(X) \triangleleft \pi_1(Y)$, причем в этом случае $\mathrm{Aut}_Y X \cong \pi_1(Y)/\pi_1(X)$. Такие накрытия называются *накрытиями Галуа*.

Любое накрытие можно вложить в накрытие Галуа (для этого надо выбрать нормальную подгруппу конечного индекса в произвольной подгруппе конечного индекса). Поэтому естественно считать морфизм $\mathrm{Spec}L \to \mathrm{Spec}K$ *накрытием*, если L/K сепарабельное расширение. В таком случае теория Галуа полей дословно совпадает с теорией накрытий топологических пространств (топологической теорией Галуа)!

Будем теперь стараться дать определение накрытия в случае произвольного морфизма спектров. Для этого нам понадобится следующее определение из коммутативной алгебры.

Определение. Пусть $A \subset B$ — расширение колец. Элемент $b \in B$ называется *целым* над A, если существует многочлен $P \in A[x]$ со старшим коэффициентом 1 (унитарный) такой, что $P(b) = 0$. Расширение $A \subset B$ называется *целым*, если любой элемент $b \in B$ цел над B.

Утверждение 5.4. Пусть A кольцо, $A \subset B$ — расширение колец. Тогда $b \in B$ цел над A тогда и только тогда, когда $A[b]$ является конечно порожденным A-модулем.

Доказательство.

1 способ. В одну сторону все следует из того, что если $P(b) = 0$, $P \in A[x]$ — унитарный многочлен степени n, то $A[b] =< 1, b, \dots, b^{n-1} >_A$.

Пусть теперь известно, что $A[b] =< v_1, \dots, v_n >_A$ является конечно порожденным A-модулем. Применим так называемый det-трюк. Умножая образующие на b, мы получаем систему линейных уравнений:

$$bv_1 = a_{11}v_1 + \ldots + a_{1n}v_n,$$
$$\ldots$$
$$bv_n = a_{n1}v_1 + \ldots + a_{nn}v_n.$$

Докажем, что определитель D матрицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} - b & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - b & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - b \end{vmatrix}$$

аннулирует весь модуль (и, в частности, $1 \in B$), что, в свою очередь, дает уравнение целой зависимости на b.

Обозначим алгебраическое дополнение к (i, j)-ому элементу вышеуказанной матрицы через A_{ij}. Выберем $1 \leq i \leq n$. Домножив первую строку матрицы на A_{1i}, вторую на $-A_{2i}$, третью на A_{3i} и т.д., мы получим новую матрицу, которая по-прежнему будет аннулировать вектор $(v_1, \dots, v_n)$. Но если мы сложим все строки новой матрицы, то везде, кроме i-ого места, будут стоять нули ("фальшивое разложение определителя"), а в i-ом месте будет стоять определитель D исходной матрицы ("разложение определителя по столбцу"). Значит, $Dv_i = 0$. Аналогичное верно и для всех остальных порождающих модуля $A[b]$, а, значит, D аннулирует весь модуль $A[b]$.

2 способ. Докажем утверждение для случая, когда A нетерово кольцо. Тогда если A-модуль $A[b]$ конечно порожден, то он нетеров и возрастающая цепочка подмодулей $< 1 >_A \subset < 1, b >_A \subset < 1, b, b^2 >_A \subset \ldots$ должна стабилизироваться. Значит, для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство подмодулей $< 1, b, b^2, \dots, b^{n-1} >_A = < 1, b, b^2, \dots, b^{n-1}, b^n >_A$, что дает уравнение целой зависимости на b над A.

Из доказанного следует, что при расширении колец $A \subset B$ сумма, разность и произведение целых над A элементов $b_1, b_2 \in B$ снова являются целыми, ибо если модули $A[b_1]$ и $A[b_2]$ конечно порождены над A, то и модуль $A[b_1, b_2]$ конечно порожден над A (сравните с аналогичным утверждением для алгебраических элементов над полем). Значит, для расширений $A \subset B$ можно рассматривать кольца, являющиеся *целыми замыканиями* A в B: множества, состоящие из всех элементов B, целых над A.

Заметим, что если кольцо $B \supset A$ является конечно порожденной алгеброй над нетеровым кольцом A, то B/A является целым расширением тогда и только тогда, когда B является конечно порожденным A-модулем (проверьте это!). Из утверждения 5.4 также следует, что композиция целых расширений снова является целым расширением.

Определение. Целостное кольцо называется *целозамкнутым*, если оно совпадает со своим целым замыканием в своем поле частных. Спектр $\mathrm{Spec} R$ (многообразие с координатной алгеброй $k[X]$) называется *нормальным(ой)*, если R ($k[X]$) целозамкнуто.

Например, $\mathbb{A}^n$ и $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_K$ нормальны, где $\mathcal{O}_K$ — целое замыкание $\mathbb{Z}$ в некотором конечном расширении $\mathbb{Q} \subset K$.

Определение. Морфизм спектров $\mathrm{Spec} B \to \mathrm{Spec} A$ называется *конечным*, если сопряженный гомоморфизм колец $A \to B$ является целым расширением, A является нетеровым кольцом, а B является конечно порожденной алгеброй над A.

Оказывается, что из этого алгебраического условия на расширение колец следуют геометрические свойства конечных морфизмов.

Утверждение 5.5. Конечный морфизм спектров $\mathrm{Spec} B \to \mathrm{Spec} A$ является сюръективным отображением.

Доказательство. Сразу заметим, что утверждение является локальным: если $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A$, то расширение $A_{\mathfrak{p}} \subset S^{-1}B$ тоже является целым, где $S = A \setminus \mathfrak{p}$ (проверить!) (переход к локализации является аналогом слов из матанализа "перейдем к достаточно малой окретности"). Локальные кольца намного удобнее, ибо в них верна лемма Накаямы. По-прежнему, обозначим через $\mathfrak{p}$ максимальный идеал в $A_{\mathfrak{p}}$. Так как расширение целое, то из условий на конечность для колец A и B и из утверждения 5.4 следует, что $S^{-1}B$ является конечно порожденным $A_{\mathfrak{p}}$-модулем. Значит, по лемме Накаямы, $\mathfrak{p}S^{-1}B \neq S^{-1}B$. Если мы вложим $\mathfrak{p}S^{-1}B$ в какой-нибудь максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset S^{-1}B$, то его пересечение с $A_{\mathfrak{p}}$ будет равно $\mathfrak{p}$. Для перехода к исходным кольцам A и B надо просто рассмотреть множество числителей идеала $\mathfrak{m} \subset S^{-1}B$.

Пример. Пусть на спектр $\mathrm{Spec} R$ или на аффинное многообразие X действует конечная группа G. Тогда можно определить факторспектр $(\mathrm{Spec} R)/G$ или фактормногообразие X/G, как $\mathrm{Spec}(R^G)$ или как многообразие X/G, соответствующее подалгебре инвариантов $k[X]^G$ (она является конечно порожденной над основным полем по теореме Гильберта об инвариантах). Возникают естественные морфизмы $\mathrm{Spec} R \to (\mathrm{Spec} R)/G$ и $X \to X/G$. Докажем, что расширения колец $R^G \subset R$ и $k[X]^G \subset k[X]$ целые. Рассуждение абсолютно одинаково для обоих расширений. Пусть $f \in R$. Тогда многочлен $\prod_{g\in G}(T-g(f))\in R^G[T]$ является уравнением целой зависимости для f над R^G. В случае многообразия тривиально выполняются условия на нетеровость $k[X]^G$ и конечную порожденность $k[X]$ над $k[X]^G$, и, стало быть, морфизм $X\to X/G$ конечен.

Изучим теперь слои при конечном отображении. Следующее определение, использующее понятие спектра, очень важно и при изучении алгебраических многообразий над алгебраически замкнутым полем.

Определение. Пусть задан морфизм спектров $\varphi: Y=\mathrm{Spec}B\to X=\mathrm{Spec}A$. Тогда *слоем* $Y_{\mathfrak p}$ морфизма φ над точкой $\mathfrak p\in\mathrm{Spec}A$ называется спектр $\mathrm{Spec}(S^{-1}(B/\mathfrak pB))$, где $S=(A/\mathfrak p)\setminus\{0\}$.

Образ естественно определенного морфизма $Y_{\mathfrak p}\to Y$ в точности состоит из тех точек на Y, которые переходят в $\mathfrak p$ (проверьте это!).

Утверждение 5.6. Слои конечного морфизма $\mathrm{Spec}B\to\mathrm{Spec}A$ конечны, что объясняет его название.

Доказательство. Так как B является конечно порожденным модулем над A, то $B/\mathfrak pB$ является конечно порожденным модулем над $A/\mathfrak p$. Значит, в обозначениях из определения слоя, кольцо $R=S^{-1}(B/\mathfrak pB)$ является конечномерным векторным пространством над полем $k(\mathfrak p)$. Пусть $\mathfrak q\subset R$ некоторый простой идеал. Тогда умножение на любой элемент $x\in R/\mathfrak q$ является оператором M_x с нулевым ядром в конечномерном пространстве $R/\mathfrak q$ над полем $k(\mathfrak p)$. Значит, он обратим, а $x^{-1}=M_x^{-1}(1)$. Отсюда следует, что $R/\mathfrak q$ поле, и все простые идеалы в R максимальны. Это равносильно тому, что все простые идеалы в R минимальны. Значит, из упражнения 5.2(д) следует, что их конечное число.

Утверждение 5.7. Пусть $f: X \dashrightarrow Y$ рациональное доминантное отображение аффинных алгебраических многообразий (то есть определенное на некотором открытом подмножестве $U\subset X$ и с плотным на Y образом), причем соответствующее расширение полей $k(Y)\hookrightarrow k(X)$ является конечным сепарабельным степени d. Тогда существует такое открытое подмножество $V\subset Y$, что для любой точки $y\in V$ "геометрический" слой $f^{-1}(y)$ (то есть просто прообраз y) состоит ровно из d точек.

Такие отображения называются *отображениями конечной степени*, а d называется их *степенью*.

Примеры. (а) Проекция гиперболы $\{xy-1=0\}\subset\mathbb A^2$ на прямую $\mathbb A^1$, при которой $(x,y)\mapsto x$. Степень отображения равна 1.

(б) Морфизм прямой $f:\mathbb A^1\to\mathbb A^1$, $z\mapsto z^n$, $(n,\mathrm{char}k)=1$. Степень отображения равна n. При этом "геометрический" слой над $x=(0,0)$ состоит из одной точки $y=(0,0)$, а "настоящий" слой изоморфен Spec$k[z]/(z^n)$. Заметим, что при индуцированном отображении локальных колец (являющихся кольцами главных идеалов) $\varphi : \mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_y$ выполняется $\varphi(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_y^n$. Данный эффект называется *ветвлением.*

Ясно, что конечный морфизм является отображением конечной степени. Однако для спектров утверждение 5.7 в буквальном смысле неверно.

Пример. Рассмотрим конечный морфизм Spec$\mathbb{Z}[i] \to$ Spec$\mathbb{Z}$. Пусть $(p) \in$ Spec$\mathbb{Z}$. Тогда слой является Spec$(\mathbb{Z}[i]/(p)) \cong$ Spec$(\mathbb{F}_p[x]/(x^2+1))$ (при вычислении слоя локализовывать не приходится, так как $\mathbb{Z}/(p)$ — уже поле). Пусть $p \neq 2$. Если в $\mathbb{F}_p$ есть квадратный корень из -1, то слой состоит из одной точки и соответствует квадратичному расширению $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_{p^2}$, а иначе из двух и соответствует диагональному вложению $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p$.

Формализуем теперь понятие ветвления.

Утверждение 5.8. Спектр размерности 1 является гладким тогда и только тогда, когда он нормален. При этом локальные кольца являются кольцами главных идеалов, которые являются степенями максимального.

Мы разберем это утверждение на следующей лекции.

Пусть теперь $f : X \to Y$ морфизм нормальных спектров размерности 1. Пусть $x \mapsto y$. При индуцированном гомоморфизме $\varphi : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ возникает число e, определяемое из соотношения $\varphi(\mathfrak{m}_y) = \mathfrak{m}_x^e$. Оно называется *индексом ветвления.*

Теперь мы наконец способны дать общее определение накрытия (для которого должно отсутствовать ветвление).

Определение. Морфизм спектров $f : X \to Y$ называется *накрытием*, если для любых двух точек $x \mapsto y$ для индуцированного гомоморфизма колец $\varphi : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ выполняется $\varphi(\mathfrak{m}_y) = \mathfrak{m}_x$, а расширение полей вычетов $k(y) \subset k(x)$ является конечным сепарабельным.

Вот как можно перевести топологическое понятие накрытия на язык коммутативной алгебры!