Лекция 7. Расширения локальных полей.

Определение. Кольцо R *дедекиндово*, если оно нетерово, целозамкнуто и одномерно.

Это понятие является непосредственным обобщением ДНК. В прошлый раз была теорема, которая может быть переформулирована так:

Теорема 7.0. Нетерово одномерное кольцо дедекиндово тогда и только тогда, когда все его локализации являются ДНК.

Теперь мы сформулируем еще одну важную теорему:

Теорема 7.1. Пусть $\mathcal{O}_K$ — дедекиндово кольцо с полем частных K, L/K — конечное сепарабельное расширение полей. Тогда кольцо $\mathcal{O}_L$, являющееся целым замыканием $\mathcal{O}_K$ в L, будет дедекиндовым кольцом. Кроме того, если кольцо $\mathcal{O}_K$ является областью главных идеалов, то $\mathcal{O}_L$ является свободным модулем над $\mathcal{O}_K$ ранга $n = [L : K]$.

Рассмотрим индуцированный морфизм спектров: $\varphi : \mathrm{Spec}\mathcal{O}_L \to \mathrm{Spec}\mathcal{O}_K$. Пусть $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\mathcal{O}_K$, $\mathfrak{B} \in \mathrm{Spec}\mathcal{O}_L$ причем $\varphi(\mathfrak{B}) = \mathfrak{p}$, то есть $\mathfrak{B} \cap \mathcal{O}_K = \mathfrak{p}$. Мы имеем расширение ДНК $(\mathcal{O}_K)_\mathfrak{p} \subset (\mathcal{O}_L)_\mathfrak{B}$. Для него определены инварианты e (индекс ветвления) и f: $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \mathfrak{B}^e$, $[k(\mathfrak{B}) : k(\mathfrak{p})] = f$. Для их нахождения удобно переходить к пополнениям ДНК. Заметим, что при пополнении колец $(\mathcal{O}_K)_\mathfrak{p}$ и $(\mathcal{O}_L)_\mathfrak{B}$ не меняются интересующие нас числа e и f.

Обозначим через $K_\mathfrak{p}$ и $L_\mathfrak{B}$ локальные поля, являющиеся полями частных пополнений колец $(\mathcal{O}_K)_\mathfrak{p}$ и $(\mathcal{O}_L)_\mathfrak{B}$ соответственно.

Теорема 7.2. Пусть $L = K(\alpha) \cong K[T]/(P(T))$. Тогда

$$K_\mathfrak{p}[T]/(P(T)) \cong \bigoplus_{\mathfrak{B} \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})} L_\mathfrak{B}.$$

Утверждение 7.3. Кольцо $\widehat{(\mathcal{O}_L)_\mathfrak{B}}$ является целым замыканием полного ДНК $\widehat{(\mathcal{O}_K)_\mathfrak{p}}$ в локальном поле $L_\mathfrak{B}$. В частности, в этом случае применима теорема 7.1.

Будем изучать расширения локальных полей. Сменим обозначения: $K \subset L$ — конечное сепарабельное расширение локальных полей, $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_L$ — расширение полных ДНК, $\mathfrak{p}_K \subset \mathcal{O}_K$, $\mathfrak{p}_L \subset \mathcal{O}_L$ соответствующие максимальные идеалы, k и k_L — поля вычетов колец $\mathcal{O}_K$ и $\mathcal{O}_L$ соответственно. Пусть e и f — инварианты расширения $K \subset L$, $[L : K] = n$.

Утверждение 7.4. $ef = n$.

Определение. Расширение локальных полей называется *неразветвленным*, если $e = 1$ ($f = n$). Расширение называется *вполне разветвленным*, если $f = 1$ ($e = n$).

Будем предполагать в дальнейшем, что поле k совершенно (например, для p-адических чисел оно конечно).

Утверждение 7.5. Существует промежуточное расширение $K \subset E \subset L$, являющееся наибольшим неразветвленным над K подрасширением в L, причем $[E : K] = e$, то есть L/E — вполне неразветвленное расширение.

Рассмоторим теперь тот случай, когда L/K является расширением Галуа. Тогда каждый автоморфизм $g \in \mathrm{Gal}(L/K)$ определяет автоморфизм локального кольца $\mathcal{O}_L$. Он переводит максимальный идеал в максимальный, а значит, определяет некоторый автоморфизм фактора $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_L = k_L \to \mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_L = k_L$. Так получается гомоморфизм групп $f : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(k_L/k)$.

Утверждение 7.6. k_L/k является расширением Галуа, а гомоморфизм f сюръективен.

Следствие. Для неразветвленного расширения L/K мы получаем изоморфизм групп Галуа $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathrm{Gal}(k_L/k)$.

В том случае, когда поле k конечно, $\mathrm{Gal}(k_L/k) \cong < \mathrm{Fr} >_f$, где $< \mathrm{Fr} >$ обозначает автоморфизм Фробениуса $x \mapsto x^{|k|}$. Таким образом, для неразветвленных расширений L локального поля K с конечным полем вычетов k канонически определен элемент группы Галуа $f^{-1}(\mathrm{Fr}) \in \mathrm{Gal}(L/K)$, также называемый *морфизмом Фробениуса.*

Пусть расширение локальных полей задано в виде $L = K(\alpha)$. Тогда характер ветвления (то есть инварианты e и f) тесно связан с минимальным многочленом $f \in K[T]$ для α.

Утверждение 7.7. Расширение L/K неразветвлено тогда и только тогда, когда существует элемент $\alpha \in \mathcal{O}_L$, для которого редукция его минимального многочлена $\overline{f}(T) \in k[T]$ не имеет кратных корней (в алгебраическом замыкании поля k).

Утверждение 7.8. Расширение L/K вполне разветвлено тогда и только тогда, когда существует элемент $\alpha \in \mathcal{O}_L$, минимальный многочлен которого является *многочленом Эйзенштейна*, то есть имеет вид $T^e + a_{e-1}T^{e-1} + \ldots + a_1T + a_0$, где $a_i \in \mathfrak{p}_K$, $a_0 \notin \mathfrak{p}_K^2$.