Экзамен по курсу "Алгебраическая теория чисел. Начальный курс", весенний семестр, 2003

1) Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие над $\overline{\mathbb{Q}}$, заданное уравнениями с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Известно, что X имеет ровно одну особую точку. Доказать, что ее координаты из $\mathbb{Q}$.

2) (а) На вещественной плоскости нарисованы декартовы оси координат, отмечена точка $(0, 1)$ и нарисована кубическая парабола $y = x^3$. Построить циркулем и линейкой правильный 7-угольник.

(б) Все то же самое, только на плоскости *не* нарисованы оси координат, но отмечено их начало (центр кубической праболы), а отрезок длины 1 нарисован вдали от кубической параболы (то есть выбран масштаб).

3) (а) Найти кольцо целых $\mathcal{O}_K$ в поле $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, где α — корень многочлена $x^3 - 3x + 1$. (Указание: посчитайте дискриминант из глобальных и локальных соображений.)

(б) Найти закон разложения простых чисел в кольце $\mathcal{O}_K$. (Указание: вычислите морфизмы Фробениуса, вложив данное расширение в круговое.)

4) Рассматривая разложение простых чисел в соответствующих кольцах целых, доказать, что если натуральное число m и простое p взаимно просты, а r — произвольное натуральное число, то $\mathbb{Q}(\zeta_m) \cap \mathbb{Q}(\zeta_{p^r}) = \mathbb{Q}$, где ζ_k — примитивный корень k-ой степени из 1. Вывести из этого, что $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$.

5) Пусть $f_n(x)$ — минимальный многочлен над $\mathbb{Q}$ для ζ_n. Используя теорию Галуа, найти для простого числа p вид разложения редукции многочлена f_n в $\mathbb{F}_p[x]$ на неприводимые сомножители, в случае, когда

(а) $(p, n) = 1$,

(б) p делит n.

6) Пусть K — локальное поле с конечным полем вычетов. Докажите, что для любого натурального числа n существует и единственно с точностью до изоморфизма над K неразветвленное расширение L/K степени n. Другими словами, неразветвленное расширение локального поля однозначно определяется расширением его поля вычетов.

7) Доказать, что спектр $\mathrm{Spec} R$ несвязен как топологическое пространство тогда и только тогда, когда существует разложение $R = A \oplus B$ в прямую сумму колец. (Указание: найдите ортогональные

идемпотенты, то есть такие элементы $e_1, e_2 \in R$, что $e_1e_2 = 0$, $e_1e_1 = e_2e_2 = e_1 + e_2 = 1$.)

8) Существует аддитивная теория Артина-Шрейера, рассуждения в которой параллельны мультипликативной теории Куммера. Она изучает циклические расширения степени p поля K, для которого $\mathrm{char} K = p > 0$.

(а) Показать, что если в K содержится хотя бы один корень многочлена $P_a(x) = x^p + x - a$, $a \in K$, то в K есть и все остальные его корни. Доказать, что в противном случае многочлен $P_a(x)$ неприводим, а расширение $K(\alpha)/K$ является циклическим расширением Галуа, где α — корень $P_a(x)$.

(б) (аддитивная форма теоремы Гильберта 90) Пусть L/K — циклическое расширение Галуа степени p с группой $G =< g >_p$. Доказать, что для любого элемента $\beta \in L$ его след равен 0 тогда и только тогда, когда существует элемент $\alpha \in L$ такой, что $\beta = \alpha - g(\alpha)$.

(в) Пусть L/K циклическое расширение степени p. Тогда существует $a \in K$ такое, что $L = K(\alpha)$, где α — корень многочлена $P_a(x)$.

9) (а) Доказать, что для любого натурального n существует расширение Галуа $K/\mathbb{Q}$ с группой Галуа, изоморфной $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(б) Любая ли конечная абелева группа изоморфна группе Галуа для некоторого абелева расширения $\mathbb{Q}$?

При решении задач можно пользоваться всеми утверждениями из курса, в том числе и не доказанными.

Удачи!