Обозначение. k — произвольное алгебраически замкнутое поле.

Определение. Аффинным алгебраическим многообразием называется подмножество аффинного пространства $\mathbb{A}^n$, состоящее из решений системы уравнений $F_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где $\{F_\alpha\}$ — некоторое множество многочленов от n переменных с коэффициентами из поля k.

Упражнение 3.1. Пусть многообразие X задано уравнениями $F_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = 0$. И пусть G такой многочлен, что $G^r \in (F_\alpha)$ для некоторого r. Докажите, что тогда многообразие X задается уравнеими $F_\alpha = 0$ и $G = 0$. Таким образом в качестве множеств F_α достаточно рассматривать только радикальные идеалы.

Теорема Гильберта о Нулях. Пусть I — радикальный идеал кольца многочленов от n переменных, и X — соответсвующее ему многообразие. Тогда для любого многочлена F из того, что $F(P) = 0$ для любой точки $P \in X$ следует, что $F \in I$. Таким образом имеется взаимно однозначное соответствие между радикальными идеалами и многообразиями в аффинногм пространстве $\mathbb{A}^n$.

Определение. Функция f на многообразии X со значениями из поля k называется регулярной, если существует такой многочлен $F \in k[x_1, \ldots, x_n]$, что $f(P) = F(P)$ для всех точек P многообразия X.

Упражнение 3.2. Докажите, что алгебра $k[X]$ регулярных функций на многообразии $X \in \mathbb{A}^n$ изоморфна $k[x_1, \ldots, x_n]/I$, где I — идеал соответствующий X.

Упражнение 3.3. Докажите, что теорома Гильберта о нулях останется верной, если алгебру многочленов заменить на алгебру регулярных функций на многообразии X, а мноогобразия в $\mathbb{A}^n$ — на подмногообразия X.

Упражнение 3.4. Пусть гиперповерхность $X \subset \mathbb{A}^n$ задана уравнением $F(x, \ldots, x_n) = 0$. Найдите ядро отбражения из алгебры $k[x_1, \ldots, x_n]$ в алгебру $k[X]$ регулярных функций на X, которое каждый многочлен переводит в его ограничение на X.

Упражнение 3.5. Пусть многообразие $X \subset \mathbb{A}^2$ задается уравнениями $F = x^2 + y^2 - 1 = 0$ и $G = x - 1 = 0$. Надите идеал X. Совпадает ли он с идеалом (F,G)?

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$ — два мноогобразия . Отображение $\varphi : X \to Y$ называется регулярным, если существуют такие регулярные функции $f_1, \ldots, f_m$ на мноогобразии X, что $\varphi(P) = (f_1(P), \ldots, f_n(P))$ для всех точек $P \in X$.

Определение. Регулярное отображение $\varphi : X \to Y$ называется изоморфизмом, если существует такое регулярное отображение $\psi : Y \to X$, что $\varphi \circ \psi = id_X$ и $\psi \circ \varphi = id_Y$.

Упражнение 3.6. Докажите, что композиция регулярных отображений тоже регулярное отображение.

Упражнение 3.7. Покажите, что понятие регулярной функции совпадает понятием регулярного отображения в прямую $\mathbb{A}^1$.

Упражнение 3.8. Пусть X и Y — многообразия. Докажите, что отбражение $\varphi : X \to Y$ регулярно тогда и только тогда, когда для любой регулярной функции f на Y композиция $f^*\varphi = f \circ \varphi$ — регулярная функция на X, и, таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между множеством регуляргых отображений из X в Y и множеством гомоморфизмов алгебр $k[Y]$ и $k[X]$.

Упражнение 3.9. Пусть C — плоская кривая, заданная уравнением $y^2 = x^3$, и пусть $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ — отображение $\mathbb{A}^1 \to C$. Является ли оно изоморфизмом?

Указание. Все элементы кольца $k[C]$ однозначно записываются в виде $P(x) + Q(x)y$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Упражнение 3.10. Найдите все автоморфизмы прямой $\mathbb{A}^1$

Определение. Многообразие называется неприводимым, если оно не является объединением двух других отличных от него многообразий.

Упражнение 3.11. a. Пусть $F = GH$. Докажите, что гиперповерхность, определенная уравнением $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$, является объединением двух гиперповерхностей, определенных уравнениями $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ и $H(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

b. Какие гиперповерхности являются неприводимыми? Докажите, что любая гиперповерхность единственным образом раскладывается в объединение неприводимых.

c. Сделайте то же, что в пункте b, для произвольного многообразия.

Определение. Пусть X — неприводимое многообразие. Тогда поле частных целостного кольца $k[X]$ называется полем рациональных функций на X. Оно обозначается $k(X)$.

Определение. Пусть характеристика поля k равна p. Морфизмом Фробениуса называется отбражение $F_p : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, которое задается формулой $F_p(x_1, \ldots .x_n) = (x_1^p, \ldots, x_n^p)$.

Упражнение 3.12. a. Докажите, что морфизм Фробениуса является взаимно однозначным отображением.

b. Является ли морфизм Фробениуса изоморфизмом?

c. Найдите все неподвижные точки морфизма Фробениуса.

Определение. Топологией Зарисского на многообразии называется топология в которой замкнутыми множествами являются подмногообразия многообразия X.

Упражнение 3.13. a. Докажите, что топология Зарисского действительно является топологией.

b. Докажите, что если X — неприводимое многообразие, то любое открытое множество всюду плотно.

Определение Рациональная функция f на многообразии X называется регулярной в точке $P \in X$, если найдутся такие две регулярные функции g и h, что $f = g/h$, и $h(P) \neq 0$. В этом случае число $f(P)/g(P)$ называется значением функции f в точке P

Упражнение 3.14. Пусть $\varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ — регулярное отображение, которое точку с координатами (x, y) переводит в точку с координатами (x, xy). Будет ли образ φ открытым или замкнутым в $\mathbb{A}^2$?

Упражнение 3.15. Пусть f — рациональная функция на многообразии X. Докажите, что множество точек, в которых f регулярна, открыто в X.

Упражнение 3.16. Докажите, что если рациональная функция регулярна в каждой точке многообразия, то она регулярна.

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$ — два неприводимых многообразия, U — открытое подмножество X. Рациональным отображением $\varphi : X \to Y$ называется набор таких рациональных функций $f_1, \ldots, f_m$ на многообразии X, что для всех точек $P \in X$, в которых все f_i регулярны, $(f(P), \ldots, f_n(P)) \in Y$.

Если в точке P все функции f_i регулярны то φ называется регулярной в точке P, а точка $(f_1(P), \ldots, f_m(P)) \in Y$ — образом точки P. Образом многообразия X называется множество точек $\{\varphi(P) : \varphi \text{ регулярно в } P\}$.

Упражнение 3.17. Пусть φ — рациональное отображение многообразия X в многообразие Y. Докажите, что множество точек, в которых φ регулярна, открыто в X.

Упражнение 3.18. Пусть образ рационального отображения $\varphi : X \to Y$ плотен в Y. Докажите, что композиция $\varphi \circ \psi$, где $\psi : Y \to Z$ — произвольное рациональное отображение, тоже является рациональным отображением.

Определение. Рациональное отображение $\varphi : X \to Y$ называется бирациональным изоморфизмом, если существует такое рациональное отображение $\psi : Y \to X$, что $\varphi \circ \psi = id_X$ и $\psi \circ \varphi = id_Y$.

Упражнение 3ю19 a. Пусть $\varphi : X \to Y$ — рациональное отображение неприводимых многообразий. Докажите, что для любой регулярной функции f на Y, $\varphi^* f$ — рациональная функция на X.

b. Когда φ^* продолжается до гомоморфизма полей $k(Y)$ и $k(X)$?

Определение. Многообразие называется рациональным, если оно бирационально изоморфно аффинному пространству.

Упражнение 3.20. a. Докажите, что многообразие $X \subset \mathbb{A}^n$, заданное одним невырожденным уравнением второй степени, рационально.

b. Докажите, что кривая в $\mathbb{A}^2$, заданная уравнением $y^2 = x^2(x-a)$, где $a \in k$, рациональна.

Упражнение 3.21. В каких точках окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$, рациональная функция $(y-1)/x$ регулярна?