Определение. Размерностью неприводимого многообразия X называется длина d максимальной цепочки различных неприводимых подмногообразий $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_d \neq X$. Размерностью произвольного многообразия X называется наибоьшая из размерностей его неприводимых компонент.

Упражнение 4.1. Найдите размерность подмногообразия в $\mathbb{A}^2$, заданного одним уравнением.

Теорема. Пусть X — неприводимое многообразие. Тогда размерность X равна степени трансцендентности поля $k(X)$.

Упражнение 4.2. Найдите размерность аффинного пространства $\mathbb{A}^n$.

Упражнение 4.3. Найдите все нульмерные многообразия.

Упражнение 4.4. Докажите, что все неприводимые компоненты гиперповерхности в $\mathbb{A}^n$ имеют размерность $n-1$.

Теорема о размернрсти слоев. Пусть $\varphi : X \to Y$ — доминантное рациональное отображение. Пусть $\dim X = m$ и $\dim Y = n$. Тогда

a. $\dim X \geq \dim Y$.

b. Для любой точки $y \in Y$ $\dim \varphi^{-1}(y) \geq m - n$, если $\varphi^{-1}(y)$ не пусто.

c. Почти Для любой точки $y \in Y$ $\dim \varphi^{-1}(y) = m - n$.

Определение. Локальным кольцом неприводимого многообразия X в точке $P \in X$ называется кольцо $\mathcal{O}_{X,P}$ рациональных функций на X, которые регулярны в точке P.

Кольцо $\mathcal{O}_{X,P}$ содержит единственный максимальный идеал $\mathfrak{m}_{X,P}$, состоящий из функций, обращающихся в нуль в точке P.

Упражнение 4.5. Придумайте определение локального кольца в точке не неприводимого многообразия.

Упражнение 4.6. Пусть $\varphi : X \to Y$ — рациональное отбражение, и пусть φ регулярно в точке $P \in X$, и φ^{-1} в точке $\varphi(P) \in Y$. Докажите, что $\mathcal{O}_{X,P}$ изоморфно $\mathcal{O}_{Y,\varphi(P)}$.

Упражнение 4.7. Отображение $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ является бирациональным изоморфизмом прямой $\mathbb{A}^1$ и кривой C в $\mathbb{A}^2$, заданной уравнением $y^2 = x^3$. Найдите $\varphi^*(\mathcal{O}_{(0,0)}) \in k(t)$.

Упражнение 4.8. Докажите, что локальное кольцо точки $(0,0)$ коодинатного креста в $\mathbb{A}^2$ изоморфно кольцу $\Omega \subset \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ ($\mathcal{O}$ — локальное кольцо точки 0 в $\mathbb{A}^1$), состоящему из таких пар функций (f, g), что $f(0) = g(0)$.

Упражнение 4.9. Найдите локальное кольцо точки $(0,0,0)$ коодинатного креста в $\mathbb{A}^3$.

Упражнение 4.10. Найдите локальное кольцо точки $(0,0)$ на кривой в $\mathbb{A}^2$, заданной уравнением $xy(x-y) = 0$.

Определение. Касательным пространством к многообразию $X \subset \mathbb{A}^n$ в точке $P \in X$ называется наибольшее проходящее через точку P подпространство $T_{X,P}$ пространсва $\mathbb{A}^n$, обладающее следующим свойством: для любого многочлена $F \in k[\mathbb{A}^n]$ из того, что $F = 0$ на X, следует, что $d_P F = 0$ на $T_{X,P}$.

Упражнение 4.11. Докажите, что пространство $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ изоморфно $T^*_{X,P}$.

Определение. Точки P неприводимого многообразия X, для которых $\dim T_{X,P} = \min\dim T_{X,Q}$, называются простыми. Остальные точки называются особыми.

Если все точки многообразия являются простыми, то многообразие называется гладким.

Упражнение 4.12. Найдите все особые точки гиперповерхности в $\mathbb{A}^n$.

Теорема. Размерность касательного пространства в простой точке неприводимого многообразия равна размерности этого многообразия.

Упражнение 4.13. a. Докажите, что гиперповерхность 2-го порядка, имеющая особую точку является конусом.

b. Докажите, что если гиперповерхность 3-го порядка имеет две особых точки, то прямая проходящая через них лежит в на гиперповерхности.

c. Докажите, что если кривая 3-ей степени имеет три особых точки, то она является объединением трех прямых.

Определение. Рассмотрим многообразие X и точку P на нем. Функции $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{O}_{X,P}$ называются локальными параметрами в простой точке P, если $t_i \in \mathfrak{m}_P$ и $t_1, \dots, t_n$ образуют базис пространства $T^*_{X,P}$.

Лемма Накаяма. Пусть M — конечно порожденный модуль над кольцом $\mathcal{O}$, имеющим единственный максимальный идеал $\mathfrak{m}$. Элементы $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{O}$ являются минимальной системой порождающих модуля M тогда и только тогд, когда их образы в $M/\mathfrak{m}M$ являются базисом этого пространства.

Упражнение 4.14. Докажите, что локальные параметры кольца $\mathcal{O}_{X,P}$ являются минимальной системой порождающих $\mathfrak{m}_{X,P}$.

Упражнение 4.15. В каких точках прямой $\mathbb{A}^1$ многочлен $f \in k[x]$ является локальным параметром?

Упражнение 4.16. Рассмотрим рациональную функцию f на многообразии X, регулярную в простой точке $P \in X$. Пусть $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{O}_{X,P}$ локальные параметры в точке P. Пусть f_i — образ f в $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^i$.

a. Докажите, что кольцо $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^i$ изоморфно факторкольцу кольца многочленов от переменных $t_1, \dots, t_n$ по идеалу, порожденному всеми мономами степени i.

b. Докажите, что многочлен f_i является начальным отрезком многочлена f_{i+1}. Здесь отождествлены описанное выше факторкольцо и множество многочленов степени не превосходящей $i-1$; и, таким образом, каждой регулярной в точке P функции можно поставить в соответствие ряд. Этот ряд называется ее рядом Тейлора.

Определение. Пополненым локальным кольцом в точке P многообразия X называется проективный предел колец $\mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}^i_{X,P}$. Элементами этого кольца являются такие наборы $f_i \in \mathcal{O}/\mathfrak{m}^i$, что f_i является образом f_{i+1} при отображении $\varnothing/\mathfrak{m}^{i+1} \to \varnothing/\mathfrak{m}^i$.

Упражнение 4.17. Какие элементы пополненого локального кольца обратимы?

Упражнение 4.18. Докажите, что пополненое локальное кольцо в P на прямой $\mathbb{A}^1$ не равно локальному кольцу $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,P}$.

Упражнение 4.19. Докажите, что в локальное кольцо в гладкой точке многообразия факториально. Используйте для этого факториальность пополненого локального кольца (ее доказывать не обязательно).

Упражнение 4.20. Докажите, что пополненое локальное кольцо в особой точке нодальной кубики на плоскости изоморфно кольцу формальных степенных рядов в особой точке координатного креста.