Упражнение 5.1. Спектры колец.

(а) Пусть X — алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем k, а $k[X]$ — его координатная алгебра (алгебра регулярных функций). Докажите, что максимальные идеалы $\mathfrak{m}_x \subset k[X]$ взаимно однозначно соответствуют точкам $x \in X$. Покажите, что при морфизме алгебраических многообразий $f : X \to Y$ точка $x \in X$ переходит в $y \in Y$ тогда и только тогда, когда $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_y) = \mathfrak{m}_x$, где $\varphi : k[Y] \to k[X]$ — сопряженный к f гомоморфизм координатных алгебр. Опишите $\mathrm{Spec} k[X]$ в геометрических терминах.

(б) Покажите, что при гомоморфизме колец прообраз простого идеала — простой. Приведите пример такого гомоморфизма колец, при котором прообраз максимального идеала не является максимальным.

(в) Придумайте определение аффинного алгебраического многообразия над произвольным полем. (Указание: используйте алгебраический язык.)

Пусть K поле, R — конечно порожденная K-алгебра, то есть $R \cong K[x_1, \dots, x_n]/I$. *Решением алгебры R в K-алгебре L* или *L-точкой* $\mathrm{Spec} R$ называется гомоморфизм колец $R \to L$, или, что то же самое, морфизм спектров $\mathrm{Spec} L \to \mathrm{Spec} R$.

(г) Пусть K совершенное поле, $\overline{X}$ многообразие над $\overline{K}$, идеал которого в $\overline{K}[x_1, \dots, x_n]$ порожден многочленами $f_1, \dots, f_m \in K[x_1, \dots, x_n]$, а $X = \mathrm{Spec} K[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m)$. Как связаны между собой (обычные) точки многообразия $\overline{X}$, L-точки X, где L поля, являющиеся конечными расширениями K, и точки из спектра X? Сколько точек многообразия $\overline{X}$ соответствует одной точке $\eta \in X$ такой, что $[k(\eta) : K] < \infty$? Как это связано с действием $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ на $\overline{X}$? Рассмотрите, для начала, пример $\overline{X} = \mathbb{A}^1_{\overline{K}}$, $X = \mathrm{Spec} K[T]$ (Указание: для каждого морфизма $\mathrm{Spec} L \to \mathrm{Spec} R$ можно рассмотреть образ единственной точки из $\mathrm{Spec} L$.)

(д)(для любителей коммутативной алгебры) Докажите, элемент кольца $f \in R$ является нулевой функцией на $\mathrm{Spec} R$ тогда и только тогда, когда он является нильпотентом, то есть существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n = 0$. (Указание: надо действовать от противного. Для f, не являющегося нильпотентом, можно рассмотреть множество M, состоящее из всех идеалов, не содержащих никакую степень f. Покажите, что относительно отношения включения к M можно применить лемму Цорна, причем M не пусто, а максимальный элемент в M является простым идеалом, не содержащим f.)

Множество всех нильпотентов, равное пересечению всех простых идеалов кольца, называется *нильрадикалом* кольца.

Замечание. Как будет видно при определении слоя, функции, тождественно равные нулю на $\mathrm{Spec}R$, но являющиеся при этом ненулевыми элементами кольца R, играют тем не менее свою роль.

Упражнение 5.2. Топология на спектрах.

(а) Рассмотрим $\mathrm{Spec}R$ с топологией Зариского. Покажите, что открытые подмножества вида $D(f) = \mathrm{Spec}R \backslash V(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R | f(\mathfrak{p}) \neq 0\}$ составляют базу топологии (то есть любое конечное пересечение таких является таким открытым подмножеством, а любое открытое подмножество является объединением некоторого числа таких).

Аналогичное верно и для аффинных многообразий над алгебраически замкнутым полем, если рассматривать обычные точки. Соответствующие окрытые подмножества обозначаются аналогичным образом.

(б) Покажите, что точка $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$ замкнута тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p} \subset R$ является максимальным идеалом.

Общей точкой неприводимого спектра называется точка, замыкание которой является всем спектром.

(в) Покажите, что общая точка соответствует нулевому идеалу.

(г) Докажите, что для нетерого кольца R не существует бесконечно убывающей вниз цепочки замкнутых подмножеств на $\mathrm{Spec}R$. Выведите отсюда, что $\mathrm{Spec}R$ можно однозначным образом преставить в виде объединения неприводимых замкнутых подмножеств.

(д) Выведите из (г), что для нетерого кольца множество минимальных идеалов конечно.

(е) Докажите, что спектры (даже ненетеровых) колец компактны.

Упражнение 5.3. Морфизмы спектров.

(а) Покажите, что морфизм спетров является непрерывным отображением.

Пусть $R \to S$ сюръективный гомоморфизм колец. Тогда соотвествующий морфизм спектров $\mathrm{Spec}S \to \mathrm{Spec}R$ называется *замкнутым вложением.*

(б) Проверьте, что $\mathrm{Spec}S \to \mathrm{Spec}R$ действительно является вложением и его образ замкнут. Придумайте морфизм спектров с замкнутым образом, являющийся вложением, но не являющийся замкнутым вложением. (Указание: используйте то, что $\mathrm{Spec} R/\mathfrak{N} \to \mathrm{Spec} R$ индуцирует гомеоморфизм спектров, где $\mathfrak{N}$ является нильрадикалом R.)

(в) Докажите, что гомоморфизм колец $R \to S$ инъективен тогда и только тогда, когда соответствующее отображение спектров $\mathrm{Spec} S \to \mathrm{Spec} R$ является *доминантным*, то есть его образ плотный. (Указание: для любого замкнутого подмножества, не совпадающего со всем спекром, существует ненулевая функция, равная на нем нулю.)

Таким образом, любой морфизм спектров разлагается в композицию доминантного отображения и замкнутого вложения.

(г) Пусть $S \subset R$ мультипликативно замкнутое подмножество. Сопоставляя элементу $f \in R$ дробь $\frac{f}{1}$, можно определить естественный гомоморфизм колец $\varphi : R \to S^{-1}R$ и, соответственно, морфизм спектров $\varphi^a : \mathrm{Spec} S^{-1}R \to \mathrm{Spec} R$. Докажите, что он инъективен и опишите его образ. Чем является его дополнение? (Указание: φ^a сопоставляет каждому идеалу $\mathfrak{p} \subset S^{-1}R$ множество его числителей.)

(д) Выведите из (г), что на главных открытых подмножествах $D(f)$ есть естественная структура спектров $\mathrm{Spec} R_f$, где R_f обозначает локализацию R в $S = \{1, f, f^2, \dots, f^n, \dots\}$ (предполагается, что f не нильпотент).

(е) Докажите геометрически, что если $X \subset \mathbb{A}^n$ — аффинное алгебраическое многообразие, $f \in k[X]$, то на $D(f)$ есть структура аффинного алгебраического многообразия. (Указание: рассмотрите $Y = \{x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n) - 1 = 0\} \subset \mathbb{A}^{n+1}$, $X \times \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{A}^{n+1}$ и их пересечение. Этот переход к $\mathbb{A}^{n+1}$ называется *трюком Рабиновича.*)

Упражнение 5.4. Локальные свойства точек и размерность.

(а)(для любителей коммутативной алгебры) Докажите лемму Накаямы: если R нетерово локальное кольцо с (единственным) максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, M — конечно порожденный модуль над ним, и $\mathfrak{m}M = M$, то $M = 0$. (Указание: используйте det-трюк, раскладывая каждую образующую b_i модуля M по всем образующим $b_1, \dots, b_n$, но с коэффициентами из $\mathfrak{m}$.)

(б) Выведите из леммы Накаяма, что $\bigcap_i \mathfrak{m}^i = 0$, а из этого то, что любая функция $f \in R$ на $\mathrm{Spec} R$ однозначно определяется своим рядом Тейлора в замкнутой точке $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec} R$, то есть отображение $R \to \hat{R}$ в пополненное локальное кольцо является вложением. (Таким образом, алгебраическая геометрия рассматривает лишь аналитические функции, в отличие от матанализа с его функцией $e^{\frac{-1}{x^2}}$!)

(в) Найдите $\dim \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$, $\dim \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[T]$, $\dim \mathrm{Spec}R$, где R — целое замыкание $\mathbb{Z}$ в конечном расширении $\mathbb{Q} \subset K$, $\dim \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\sqrt[10]{2}]$. (Указание: воспользуйтесь теоремой о размерности слоев).

(г) Проверьте, что $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$, $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[i]$, $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[T]$ — гладкие. Найдите особые точки на $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[ni]$ (Указание: заметьте, что морфизм $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[i] \to \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[ni]$ является изоморфизмом на $D(n)$.)

Упражнение 5.5. Двулистные разветвленные накрытия $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$.

(а) Пусть $\mathbb{Q} \subset K = \mathbb{Q}(\sqrt{n})$ квадратичное расширение, где n — целое число. Найдите явно кольцо $\mathcal{O}_K$, являющееся целым замыканием $\mathbb{Z}$ в K. (Указание: элемент $\alpha = a + bi \in K$ цел над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда его след и норма являются целыми числами.) (Ответ: $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$, где $\alpha = \sqrt{n}$, если $n \equiv 2, 3(\mathrm{mod} 4)$, $\alpha = \frac{\sqrt{n}+1}{2}$, если $n \equiv 1(\mathrm{mod} 4)$.)

(б) Найдите $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_K$, рассмотрев его морфизм на $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$. Пусть X замкнутый подспектр в $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$, соответствующий точкам, над которыми данный морфизм ветвится. Доказать, что $X = V(D)$, где D — дискриминант минимального уравнения для α. Этот факт является частным случаем одного очень важного обстоятельства, с которым мы еще встретимся.

(в) Рассмотрим кривую $X = y^2 - f(x) = 0 \subset \mathbb{A}^2$, прямую $\mathbb{A}^1$ (все это многообразия над алгебраически замкнутым полем) и морфизм проекции $\varphi : X \to \mathbb{A}^1$, $(x, y) \mapsto x$. Покажите, что это конечный морфизм. При каких условиях на f кривая X является гладкой? Над какими точками из $\mathbb{A}^1$ в этом случае происходит ветвление? Найдите как можно больше общего с пунктом (б).

(в) Проверьте, что $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_K$ гладкий. Найдите особые точки на $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ в случае $n \equiv 1(\mathrm{mod} 4)$.