Упражнение 6.0.

Покажите, что целостное факториальное кольцо является целозамкнутым.

Упражнение 6.1. p-адическая форма записи.

(а) Найдите p-адическую запись для -1, $-\frac{1}{p-1}$, $-\frac{1}{p^r-1}$.

(б) Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $0 \le a < b$. Найдите вид p-адической записи для $\frac{a}{b}$. (Указание: по теореме Эйлера, $p^{\varphi(b)} - 1 = bu$ для некоторого $u \in \mathbb{Z}$.)

(в) Докажите, что p-адическая запись числа $x \in \mathbb{Q}_p$ периодична налево начиная с некоторого места тогда и только тогда, когда $x \in \mathbb{Q}$.

Упражнение 6.2. Представители Тейхмюллера.

(а) Покажите, что $x^{p^n} \equiv x^{p^{n-1}} (\mathrm{mod} p^n)$ для $x \in \mathbb{Q}_p$.

(б) Докажите, что последовательность x^{p^n} сходится в $\mathbb{Q}_p$, и что всевозможные пределы таких последовательностей являются в точности представителями Тейхмюллера, то есть всеми решениями уравнения $T^p - T = 0$ в $\mathbb{Q}_p$.

(в) Найдите явно первые три знака в разложении представителей Тейхмюллера для $\mathbb{Q}_5$ (Указание: три из представителей Тейхмюллера вы уже знаете.)

Упражнение 6.3. Мультипликативная группа локальных полей.

(а) Найдите область сходимости для $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ и $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ в локальном поле с полем вычетом $\mathbb{F}_{p^k}$. (Ответ: $v(x) > \frac{v(p)}{p-1}$.)

(б) Пусть $p \neq 2$. Для группы $\mathbb{Z}_p^+$ есть фильтрация $\mathbb{Z}_p \supset p\mathbb{Z}_p \supset p^2\mathbb{Z}_p \supset \dots$ Покажите, что при изоморфизме $\exp(p \cdot *)$ она переходит в фильтрацию $U = U^1 \supset U^2 \supset U^2 \supset \dots$, где $U^i = \{x \in \mathbb{Z}_p | x \equiv 1 (\mathrm{mod} p^i)\}$. Выведите отсюда, что $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{F}_p^* \times U^1/U^n$ циклическая группа.

Упражнение 6.4. Квадраты в локальных полях.

(а) Какие из нижеперечисленных чисел являются квадратами в $\mathbb{Q}_7$: 2; 5; 7^3; 164; 123,4; 123,04?

(б) Чему изоморфна группа $\mathbb{Q}_p^*/(\mathbb{Q}_p^*)^2$? (Указание: в случае $p \neq 2$ используйте лемму Гензеля или докажите сходимость ряда для $(1+x)^{\frac{1}{2}}$; в случае $p = 2$ используйте явное описание группы $\mathbb{Q}_2^*$) (Ответ: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ в случае $p \neq 2$, и $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ в случае $p = 2$.)

(в) Найдите явно представителей в $\mathbb{Q}_p$ всех элементов из $\mathbb{Q}_p^*/(\mathbb{Q}_p^*)^2$.