Упражнение 7.1. Изучение слоев.

Опишите слои морфизма $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_K \to \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ (инварианты f и e), рассматривая соответствующие расширения p-адических чисел, для поля K, полученного присоединением к $\mathbb{Q}$ корня одного из следующих многочленов:

(а) $x^2 - n$ (не используйте при этом явный вид кольца целых $\mathcal{O}_K$).

(б) $x^3 - 17$ (Указание: выясните, как устроена группа $\mathbb{Q}_3^*/(\mathbb{Q}_3*)^3$.)

Сравните в этих случаях множество точек из $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$, над которыми происходит ветвление, с дискриминантом многочлена.

(в) $x^p - 1$, где p — простое число. (Указание: для $\mathbb{Q}_p$ постарайтесь, сделав замену переменной x, перейти к многочлену Эйзенштейна — это, заодно, будет один из способов доказательства неприводимости многочлена $x^{p-1} + \ldots + x + 1$.)

Упражнение 7.2. Кольцо целых в локальном случае.

(а) Пусть L/K — неразветвленное расширение локальных полей. Покажите, что тогда $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$, где $\alpha \in \mathcal{O}_L$ такой, что его редукция $\overline{\alpha} \in k_L$ порождает расширение полей вычетов: $k_L = k(\overline{\alpha})$.

(б) Пусть L/K — вполне разветвленное расширение локальных полей. Покажите, что тогда $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\pi_L]$.

(Указание: в пунктах (а) и (б) используйте явное описание полных ДНК в терминах рядов от униформизующего.)

(в) Пусть L/K — произвольное расширение локальных полей. Докажите, что существует такой $\alpha \in \mathcal{O}_L$, что $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$. (Указание: рассмотрите $\beta \in \mathcal{O}_L$ такой, что $L_0 = K(\beta)$, где L_0 — максимальное неразветвленное над K подрасширение в L. Тогда в качестве α можно взять $\beta + \pi_L$. Чтобы в этом убедиться, рассмотрите минимальный многочлен $f \in \mathcal{O}_K[T]$ для β, и докажите, что $v_L(f(\beta + \pi_L)) = 1$. Таким образом, $\mathcal{O}_K[\alpha]$ сюръективно отображается на $k_L = k_{L_0}$ и содержит некоторый униформизующий из $\mathcal{O}_L$, откуда следует, что $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\alpha]$.)

(г) Найдите кольцо целых в $\mathbb{Q}_3(\alpha)$, где α — корень многочлена $x^3 - 3x + 1$. (Указание: постарайтесь перейти к Эйзенштейну.)

(д) Приведите пример расширения локальных полей L/K, описав его как присоединение некоторого алгебраического числа α, для которого $e > 1$ и $f > 1$. (Указание: используйте (в).)

(е) Найдите инварианты e и f, а также кольцо целых для поля $L = \mathbb{Q}_5(\alpha)$, где α — корень многочлена $x^4 - 14x^2 + 9$. (Указание: догадайтесь, редуцируя данный многочлен, какими могут быть k_L, f и e, а потом обоснуйте это, используя (в).)