Напоминание. Кольцо называется дедекиндовым, если оно нетерово, целозамкнуто и каждый его простой ненулевой идеал максимален.

Определение. Пусть $\mathcal{O}$ — целостное кольцо, а K — его поле частных. Тогда дробным идеалом $\mathcal{O}$ называется конечно порожденный $\mathcal{O}$-подмодуль поля K.

Теорема. Пусть $\mathcal{O}$ — дедекиндово кольцо. Тогда все идеалы $\mathcal{O}$ однозначно разлагаются в произведение простых; и все ненулевые идеалы образуют группу по умножению.

Для того, чтобы доказать эту теорему сделайте следующие 5 упражнений. Во всех этих упражнениях $\mathcal{O}$ — дедекиндово кольцо.

Упражнение 8.1. Пусть I и J — идеалы в $\mathcal{O}$. Докажите, что если для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}$ $I_\mathfrak{p} = J_\mathfrak{p}$, то $I = J$.

Упражнение 8.2 Пусть I — идеал в кольце $\mathcal{O}$, и пусть для каждого простого идеала $\mathfrak{p}$, $r_\mathfrak{p}$ — минимальное число, такое, что $\mathfrak{p}^{r_\mathfrak{p}} \subset I$. Докажите, что почти все числа $r_\mathfrak{p}$ равны нулю.

Упражнение 8.3. a. Докажите, что $I = \prod\limits_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{r_\mathfrak{p}}$.

b. Докажите единственность разложения.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Для этого введем

Определение. Пусть I — дробный идеал $\mathcal{O}$. Тогда обратный идеал $I^{-1} = \{\alpha \in K : \alpha I \subset \mathcal{O}\}$.

Упражнение 8.4. a. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца $\mathcal{O}$. Докажите, что $\mathfrak{p}^{-1} \neq \mathcal{O}$.

Указание. Выберем элемент $a \in \mathfrak{p}$. Тогда $(a) = \mathfrak{p}I$, где I — некоторый идеал кольца $\mathcal{O}$, причем $I \neq (a)$. Пусть $b \in I - (a)$. Докажите. что $\alpha = ba^{-1} \in \mathfrak{p}^{-1} - \mathcal{O}$.

b. Докажите, что $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} = \mathcal{O}$.

Указание. Из опредления следует, что $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} \subset \mathcal{O}$. Осталось доказать, что $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}$. Но в этом члучае $\alpha\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$, что невозможно.

Упражнение 8.5. a. Докажите, что любой целый (т.е. обычный) идеал кольца $\mathcal{O}$ обратим.

b. Пусть I — дробный идеал $\mathcal{O}$. Докажите, что найдется такой элемент $\alpha \in \mathcal{O}$, что $\alpha I \subset \mathcal{O}$ — целый идеал $\mathcal{O}$.

c. Докажите, что любой дробный идеал кольца $\mathcal{O}$ обратим.

Теорема. Пусть K — конечное расширение поля $\mathbb{Q}$, и пусть $\mathcal{O}_K$ — целое замыкание кольца $\mathbb{Z}$ в K. Тогда $\mathcal{O}_K$ — дедекиндово кольцо.

Доказательство содержится в следующих двух упражнениях.

Упражнение 8.6. a. Докажите, что кольцо $\mathcal{O}_K$ целозамкнуто.

b. Докажите, что $\mathcal{O}_K$ одномерно.

Упражнение 8.7. **a.** Докажите, что для любого идеала $I \in \mathcal{O}_K$ кольцо $\mathcal{O}_K/I$ конечно.

Указание. $\mathcal{O}_K$ является свободной конечно порожденной абелевой группой. (Эту теорему можно не доказывать.)
b. Используя пункт **a**, докажите, что кольцо $\mathcal{O}_K$ нетерово.

Далее $\mathcal{O}_K$ — дедекиндово кольцо, K — его поле частых, L — конечное сепарабельное расширение K, и $\mathcal{O}_L$ — целое замыкание O_K в поле L.

Определение. Пусть $\mathfrak{p}$ — идеал в кольце $\mathcal{O}_K$. $\mathfrak{p}\mathcal{O}_K = \prod\limits_{\mathfrak{B} \in Specm \mathcal{O}_L} \mathfrak{B}^{e_{\mathfrak{B}}}$ — разложение на простые множители. Тогда число $e_{\mathfrak{B}}$ называется индексом ветвления $\mathcal{O}_L$ над $\mathcal{O}_K$ в $\mathfrak{B}$.

Упражнение 8.8. Докажите, что индекс ветвления сохраняется при локализации; и, таким образом, определение индекса ветвления сводится к определению в локальном случае.

Теорема. Пусть $\mathcal{O}$ — дедекиндово кольцо, и A — его конечное расширение. Тогда A является свободным $\mathcal{O}$- модулем.

Определение. В обозначениях предыдущей теоремы дискриминантом A называется идеал $D(A)$, подожденный числом $det||Tr_{Quot A/Quot \mathcal{O}}(u_i u_j)||$, где $\{u_i\}$ — базис A над $\mathcal{O}$.

Упражнение 8.9. Докажите корректность определения дискриминанта.

Определение. Расширение полей $K \subset L$ ветвится в идеале $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$, если в разложении на простые множители $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \prod\limits_{\mathfrak{B} \in specm \mathcal{O}_L} \mathfrak{B}^{e_{\mathfrak{B}}}$ хотя бы одно из чисел $e_{\mathfrak{B}}$ больше 1.

Теорема. Расширение полей $K \subset L$ ветвится в идеале $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p}|D(O_L/O_K)$.

Упражнение 8.10. **a.** Докажите, что $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \bigoplus\limits_{\mathfrak{B} \in specm \mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L/\mathfrak{B}^{e_{\mathfrak{B}}}$.

b. Все $e_{\mathfrak{B}}$ не больше 1 тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ не содержит нильпотентов.

Упражнение 8.11. Докажите, что конечно порожденная лгебра A кад полем k не содержит нильпотентов тогда и только тогда, когда билинейная форма $tr(uv)$ на A не выроždена.

Упражнение 8.13. Докажите последнюю теорему.

Теорема. Пусть $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ — идеал, и $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \prod\limits_{\mathfrak{B} \in specm \mathcal{O}_L} \mathfrak{B}^{e_{\mathfrak{B}}}$. Обозначим через $f_{\mathfrak{B}}$ степени расширений полей $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_L/\mathfrak{B}$. Тогда $\sum\limits_{\mathfrak{B} \subset \mathcal{O}_L} f_{\mathfrak{B}} e_{\mathfrak{B}} = [L:K]$, .

Упражнение 8.14. Пусть q — количество элементов в $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$.
a. Докажите, что $q^{[L:K]} = |\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}\mathcal{O}_L|$

b. Докажите, что $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \prod\limits_{\mathfrak{B}\in Specm\mathcal{O}_L} \mathfrak{B}^{e_{\mathfrak{B}}}$

c. Докажите, что $|\mathcal{O}/\mathfrak{B}^e| = |\mathcal{O}/\mathfrak{B}|^e$ для любого дедекиндова кольца $\mathcal{O}$ и его простого идеала $\mathfrak{B}$.

d. С помощью пунктов **a, b, c** докажите последнюю теорему.

Упражнение 8.15. Докажите, что $D(\mathbb{Z}[\alpha]/\mathbb{Z})$ равен дискриминанту минимального многочлена α.

Упражнение 8.16. Докажите, что для любых конечных расширений A и B кольца $\mathcal{O}$, если $A \subset B$, то $D(A)|D(B)$, и если $D(A) = D(B)$, то $A = B$.

Упражнение 8.17. Докажите, что дискриминант согласован с локализацией.

Упражнение 8.18. Найдите кольцо целых поля $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, где α — корень многочлена $x^3 + x + 1$.

Указание. Дискриминант многочлена $x^3 + x + 1$ равен 31.

Упражнение 8.19.Найдите кольцо целыхлюбого квадратичного расширения поля $\mathbb{Q}$