НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. Ю. Пирковский

Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов

Часть I

Москва
2005

П33

Пирковский А. Ю.

П33 Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов. Часть I. — М: 2005. — 84 с.

Книга представляет собой записки семестрового курса лекций по спектральной теории, прочитанного автором в Независимом московском университете в весеннем семестре 2003 г. Ее можно рассматривать как дополнение к стандартному университетскому курсу функционального анализа. Особое внимание уделяется построению функциональных исчислений (от голоморфного до L^∞-исчисления) и доказательству спектральной теоремы в ее различных формулировках. Включено также изложение теории кратности в терминах измеримых гильбертовых расслоений. Для книги характерен алгебраический подход, при котором линейные операторы трактуются как представления функциональных алгебр.

Для студентов и аспирантов математических и физических специальностей.

Алексей Юльевич Пирковский

Спектральная теория и функциональные исчисления
для линейных операторов

Часть I

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая брошюра представляет собой записки семестрового курса лекций по спектральной теории, прочитанного автором в Независимом московском университете в весеннем семестре 2003 г. Помимо материала, излагавшегося на лекциях, в текст включено доказательство теоремы о классификации представлений коммутативных C^*-алгебр в сепарабельных гильбертовых пространствах (на лекциях эта теорема была сформулирована без доказательства из-за недостатка времени).

Основной принцип, которого мы старались придерживаться в этих лекциях, состоит в том, чтобы рассматривать линейные операторы как представления различных алгебр, состоящих из функций, определенных на подходящих подмножествах комплексной плоскости (или, эквивалентно, как модули над этими алгебрами). Такой алгебраический подход к теории операторов зачастую позволяет более наглядно представить себе геометрическую картину, стоящую за тем или иным оператором, делает формулировки и доказательства многих классических результатов более прозрачными и компактными, и, в конечном итоге, открывает широкие возможности для различных обобщений — в том числе, на многомерный случай. В качестве примера эффективности указанного подхода отметим теорему Дж. Тэйлора [45] о голоморфном исчислении от набора коммутирующих операторов на их совместном спектре (само определение которого далеко не очевидно и потребовало развития адекватной алгебраической техники). Другой недавний пример — уже из теории «одного оператора» — решение Ж. Пизье [44] известной проблемы П. Халмоша о том, всякий ли полиномиально ограниченный оператор в банаховом пространстве подобен сжатию. При решении этой проблемы существенно использовался тот факт, что полиномиально ограниченные операторы — это то же самое, что представления дисковой алгебры $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$, в то время как операторы, подобные сжатию — это в точности так называемые вполне ограниченные представления этой алгебры.

Впрочем, все эти недавние результаты в лекции по понятным причинам не вошли. Наша более скромная цель состоит в том, чтобы познакомить читателя с классическими результатами спектральной теории (полученными в первой половине XX в.), используя при этом современный язык и современную терминологию, и подготовить его тем самым к восприятию более специальной литературы по данному предмету.

Главным инструментом, позволяющим смотреть на линейные операторы как на представления функциональных алгебр, являются всевозможные теоремы о функциональных исчислениях — голоморфном, гладком, непрерывном, борелевском и т.п. Чем более богатым функциональным исчислением обладает оператор, тем он «лучше» с точки зрения спектральной теории. В этих лекциях мы старались по возможности двигаться в направлении убывания общности — от теоремы о голоморфном исчислении, справедливой для любого ограниченного оператора в банаховом пространстве, до теорем о борелевском и L^∞-исчислении для нормального оператора в гильбертовом пространстве.

Последние три главы посвящены одному из основных результатов классической спектральной теории — спектральной теореме для нормального оператора — в ее различных формулировках. В частности, в последней главе, посвященной теории кратности, мы обсуждаем геометрическую модель нормального оператора (или, более общо, гильбертова модуля над коммутативной C^*-алгеброй), определяемую в терминах измеримых гильбертовых расслоений (=измеримых полей гильбертовых пространств) и их прямых интегралов, и даем полную классификацию таких операторов с точностью до унитарной эквивалентности.

Помимо теорем о функциональных исчислениях и спектральной теоремы, составляющих ядро курса, мы также включили в лекции разнообразный материал, необходимый (а иногда формально не необходимый, но полезный) для понимания этих теорем. К такому материалу относятся базовые сведения о банаховых и C^*-алгебрах и спектрах их элементов, полинормированных (=локально выпуклых) пространствах и алгебрах, категориях и функторах и т.д. Принцип, которым мы руководствовались при отборе этого материала, состоял в том, чтобы не жалеть времени и места на общематематические концепции, используемые по ходу дела, поскольку они зачастую помогают видеть то общее, что есть в разных областях математики.

Автор выражает глубокую благодарность А. Я. Хелемскому, научившему его функциональному анализу и многим другим вещам и любезно предоставившему в распоряжение автора записки своих тогда еще не опубликованных лекций [30], которые были существенно использованы при подготовке данного курса. Автор также признателен всем своим слушателям за внимание, проявленный интерес, терпение и поддержку. Любые замечания и предложения по поводу содержания данных лекций будут с благодарностью приняты по адресу `pirkosha@online.ru`.

1. ВВЕДЕНИЕ: ЗАДАЧА О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Во многих областях математики и математической физики приходится иметь дело с функциями от линейных операторов. Простейший пример, знакомый Вам со второго курса: чтобы решать системы линейных дифференциальных уравнений, полезно уметь брать экспоненту от оператора. Другой источник таких задач — квантовая механика. В математической модели квантовой механики, предложенной фон Нойманном в 30-ых гг. прошлого века, линейные операторы играют роль наблюдаемых (т.е. тех или иных физических характеристик исследуемой системы, которые мы хотим измерить, таких, как координата, импульс, энергия…) Часто бывает так, что одна наблюдаемая является функцией от другой или нескольких других (например, энергия выражается через координату и импульс). Вот и приходится подставлять в качестве аргументов функции не числа, а операторы. Основная сложность в том, что операторов обычно несколько, и они не коммутируют. Мы будем иметь дело в основном с функциями от одного оператора; но уже и в этом случае, как мы вскоре увидим, есть много интересных задач.

Говоря нестрого, задача о функциональном исчислении состоит в том, чтобы научиться придавать смысл выражению $f(T)$, где $T\colon E \to E$ — линейный оператор в комплексном[1] линейном пространстве E, а f — функция, заданная на каком-либо подмножестве комплексной плоскости.

Вы, конечно, хорошо знаете, что от любого линейного оператора можно «брать многочлены»: если $p \in \mathbb{C}[t]$ — многочлен, $p(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$, то $p(T)$ — это оператор $a_n T^n + \ldots + a_1 T + a_0 \mathbf{1}_E$ (здесь и далее $\mathbf{1}_E$ — тождественный оператор в E). Какие еще функции можно брать от T? Чтобы разобраться в этом вопросе, посмотрим на два простых, но важных примера.

Пример 1.1. Пусть $E = \mathbb{C}^n$, и пусть оператор T записывается в каком-либо базисе диагональной матрицей:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

[1] В дальнейшем все события будут разворачиваться над полем комплексных чисел.

Легко проверить, что для любого многочлена $p \in \mathbb{C}[t]$ оператор $p(T)$ записывается в том же базисе так:

$$p(T) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Правая часть последнего равенства имеет смысл, если вместо многочлена p в нее подставить любую функцию f — лишь бы она была определена в $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Поэтому для любого подмножества $M \subset \mathbb{C}$, такого, что $M \supset \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, и любой $f \colon M \to \mathbb{C}$ можно положить *по определению*

$$f(T) := \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Какими свойствами обладает построенное «функциональное исчисление» от T, имеет ли оно право так называться, и что следует называть функциональным исчислением в общем случае (т.е. для произвольного T)? Общепринятый подход к понятию функционального исчисления выглядит следующим образом. Обозначим через $\mathscr{L}(E)$ пространство всех линейных операторов, действующих в E, и рассмотрим отображение $\gamma_p \colon \mathbb{C}[t] \to \mathscr{L}(E)$, сопоставляющее каждому многочлену p оператор $p(T)$. Это отображение называется *полиномиальным исчислением* от T. Очевидно, γ_p обладает следующими свойствами:

1) γ_p линейно;

2) $\gamma_p(fg) = \gamma_p(f)\gamma_p(g)$ для любых $f, g \in \mathbb{C}[t]$;

3) $\gamma_p(1) = \mathbf{1}_E$;

4) $\gamma_p(t) = T$ (где $t \in \mathbb{C}[t]$ — «независимая переменная»).

Условия 1)–3) означают в точности, что γ_p — гомоморфизм алгебр, а условие 4) однозначно определяет этот гомоморфизм. Простейший, но весьма полезный принцип, лежащий в основе алгебраического подхода к теории операторов, состоит в следующем:

Задать линейный оператор $T \colon E \to E$ — это все равно, что задать гомоморфизм $\mathbb{C}[t] \to \mathscr{L}(E)$.

В самом деле, каждый оператор T задает гомоморфизм $\gamma_p \colon \mathbb{C}[t] \to \mathscr{L}(E)$, и обратно, любой гомоморфизм $\varphi \colon \mathbb{C}[t] \to \mathscr{L}(E)$ является полиномиальным исчислением от оператора $T = \varphi(t)$.

Теперь мы можем сформулировать задачу о функциональном исчислении более строго. Пусть $M \subset \mathbb{C}$, и пусть A — какая-либо алгебра функций на M (относительно поточечных операций), содержащая ограничения на M всех многочленов. Обозначим через $r\colon \mathbb{C}[t] \to A$ гомоморфизм ограничения: $r(p) = p|_M$. Задача о функциональном исчислении ставится так:

Существует ли гомоморфизм $\gamma_A\colon A \to \mathscr{L}(E)$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[t] \arrow[r, "\gamma_p"] \arrow[d, "r"'] & \mathscr{L}(E) \\ A \arrow[ur, dashed, "\gamma_A"'] & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

коммутативной?

Обозначим через $F(M)$ алгебру всех комплекснозначных функций на множестве $M \subset \mathbb{C}$. Результат, полученный в примере 1.1, теперь можно переформулировать следующим образом:

Предложение 1.1. *Пусть $E = \mathbb{C}^n$. Предположим, что оператор $T \in \mathscr{L}(E)$ в некотором базисе записывается диагональной матрицей с числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на диагонали. Тогда для любого множества $M \subset \mathbb{C}$, такого, что $M \supset \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, задача* (1.1) *разрешима для $A = F(M)$.*

Упражнение 1.1. Покажите, что условие $M \supset \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ не только достаточно, но и необходимо для разрешимости задачи (1.1) с $A = F(M)$.

Множество $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, фигурирующее выше — это не что иное, как спектр $\sigma(T)$ оператора T. Напомним, что *спектром* линейного оператора $T \in \mathscr{L}(E)$, действующего в конечномерном векторном пространстве E, называется множество его собственных значений, т.е. таких $\lambda \in \mathbb{C}$, что $Tx = \lambda x$ для некоторого ненулевого $x \in E$. (Для произвольного E спектр определяется по-другому; об этом — чуть позже.) Ситуация, описанная в предложении 1 и упражнении 1 — совершенно типичная для теории операторов; она указывает на взаимосвязь понятий спектра и функционального исчисления. Утверждения типа *«такой-то оператор T обладает функциональным исчислением для такой-то алгебры A на множестве M тогда и только тогда, когда M содержит $\sigma(T)$»*, встретятся нам на протяжении курса неоднократно.

Итак, нам предстоит иметь дело с задачами типа (1.1). В качестве E у нас будет выступать бесконечномерное банахово (или даже гильбертово) пространство, а операторы будут ограниченными (так что вместо $\mathscr{L}(E)$ в диаграмме (1.1) будет стоять алгебра $\mathscr{B}(E)$ ограниченных операторов в E). Алгебры A и $\mathscr{B}(E)$, как правило, будут снабжаться какими-либо топологиями; при этом мы будем требовать, чтобы гомоморфизм γ_A был непрерывным.

По сравнению с ситуацией, рассмотренной в примере 1, в бесконечномерном случае возникает целая серия вопросов. Во-первых, надо дать «правильное» определение спектра оператора: дело в том, что собственных значений у оператора в бесконечномерном пространстве может попросту не оказаться. Далее, если мы решим строить функциональное исчисление по аналогии с примером 1, то надо выяснить, какие операторы приводятся к «диагональному виду», и вообще, что такое «диагональный вид» оператора.

Один из центральных результатов классической спектральной теории — *спектральная теорема* — как раз и позволяет приводить *самосопряженные* операторы в гильбертовом пространстве к «диагональному виду», придает точный смысл последнему понятию, и заодно дает возможность строить функциональные исчисления для таких операторов. Чтобы приблизительно представить себе ее формулировку, полезно записать оператор из примера 1 в бескоординатной форме.

Итак, пусть $H = \mathbb{C}^n$, и пусть T — оператор в H, про который дополнительно известно, что он записывается в некотором ортонормированном базисе диагональной матрицей с действительными числами на диагонали. (Это означает в точности, что оператор самосопряжен.) Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — его *различные* собственные значения. Упорядочим их по возрастанию: $\lambda_1 < \ldots < \lambda_k$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ пусть $H(\lambda) = \{x \in E : Tx = \lambda x\}$ — соответствующее собственное подпространство. Далее, положим $H_\lambda = \bigoplus_{\mu \leqslant \lambda} H(\mu)$, и обозначим через E_λ ортогональный проектор на H_λ. Мы получаем цепочку подпространств $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$, вложенных друг в друга: $H_\lambda \subset H_\mu$ при $\lambda \leqslant \mu$. Кроме того, $H_\lambda = 0$ при $\lambda < \lambda_1$ и $H_\lambda = H$ при $\lambda \geqslant \lambda_k$. Отметим, что пространство H_λ не меняется на полуинтервале $[\lambda_i, \lambda_{i+1})$ (там оно совпадает с H_{λ_i}), а в каждом собственном значении λ_i оно делает «скачок»: к нему добавляется прямое слагаемое $H(\lambda_i)$. Тогда тот факт, что T диагонализируется, означает в точности, что

$$T = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}) \tag{1.2}$$

(здесь мы полагаем $E_{\lambda_0} = 0$). Функциональное исчисление, построенное в примере 1, задается формулой

$$f(T) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j)(E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}).$$

Спектральная теорема представляет собой обобщение двух последних формул на случай бесконечномерного H. Через несколько лекций мы ее сформулируем и докажем, а сейчас ограничимся несколькими нестрогими заявлениями рекламного характера. Для любого самосопряженного оператора T в гильбертовом пространстве H будет построено некое неубывающее семейство подпространств $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ (возрастающее, однако, уже не «скачкообразно», а более или менее произвольным образом), такое, что оператор T представляется в виде

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_\lambda,$$

где интеграл можно понимать как предел интегральных сумм вида (1.2). Функциональное исчисление от T задается формулой

$$f(T) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, dE_\lambda.$$

В отличие от конечномерного случая, последний интеграл существует не для всех функций, определенных на спектре T (что и понятно — не любую же функцию можно интегрировать!), но все же для весьма широкого их класса.

Как и многие другие важные утверждения в математике, спектральная теорема имеет несколько формулировок, по сути эквивалентных друг другу. Упомянем (опять-таки в рекламных целях) еще об одной. Снова вернемся к конечномерному случаю $H = \mathbb{C}^n$. Тот факт, что оператор $T \in \mathscr{L}(H)$ диагонализируется, означает в точности, что $H = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{R}} H(\lambda)$. Сам оператор при этом разлагается в прямую сумму скалярных (т.е. кратных тождественному) операторов

$$T = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{R}} \lambda \mathbf{1}_{H(\lambda)},$$

а функциональное исчисление приобретает вид

$$f(T) = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{R}} f(\lambda) \mathbf{1}_{H(\lambda)}.$$

Оказывается, и эти формулы обобщаются на бесконечномерный случай, только в них вместо прямой суммы будет стоять так называемый «прямой интеграл»:

$$T = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \lambda \mathbf{1}_{H(\lambda)}\, d\mu(\lambda),$$
$$f(T) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f(\lambda) \mathbf{1}_{H(\lambda)}\, d\mu(\lambda).$$

Конечно, $H(\lambda)$ уже больше не обязаны быть собственными подпространствами T (напомним — собственных подпространств вообще может не быть); более того, они не являются, строго говоря, подпространствами в H. Одна из целей нашего курса — придать смысл всем этим пока что весьма туманным заявлениям.

Итак, от самосопряженных операторов в $\mathbb{C}^n$ можно брать любые функции, определенные на спектре. Что можно сказать про несамосопряженные операторы — опять-таки, для начала, в $\mathbb{C}^n$? Посмотрим на следующий пример.

Пример 1.2. Пусть оператор $T \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ записывается в каком-либо базисе матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\sigma(T) = \{0\}$. По аналогии с примером 1, хотелось бы научиться брать от нашего оператора функции, определенные в нуле — хотя бы непрерывные. Но проблемы возникают уже с простейшей функцией $f(t) = \sqrt{t}$:

Упражнение 1.2. Пусть оператор T — такой, как в примере 2. Тогда:

1) Не существует оператора $S \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$, такого, что $S^2 = T$;

2) Более общо, при $n \geqslant 2$ не существует оператора $S \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$, такого, что $S^n = T$;

3) Для оператора T задача (1.1) неразрешима (даже) для $A = C(\mathbb{R})$.

Оказывается, единственное препятствие состоит в том, что функция $\sqrt[n]{t}$ не дифференцируема в нуле:

Упражнение 1.3. 1) Для оператора T из примера 2 задача (1.1) разрешима для $A = C^1(U)$, где $U \subset \mathbb{R}$ — любая окрестность нуля.

2) Пусть $T \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$. Предположим, что $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Тогда для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$, содержащего $\sigma(T)$, задача (1.1) разрешима для $A = C^{n-1}(U)$.

Пример 1.2 показывает, что от операторов в $\mathbb{C}^n$ можно брать лишь достаточно гладкие функции. Забегая вперед, скажем, что от ограниченных операторов в банаховом пространстве можно брать, вообще говоря, только аналитические функции. Чем оператор «лучше» (с точки зрения спектральной теории), тем больше запас функций, которые можно к нему применять.

2. СПЕКТР И ЕГО ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА

2.1. Алгебры и спектры их элементов

Само понятие спектра носит чисто алгебраический характер и имеет смысл не только для линейных операторов, но и для элементов произвольных ассоциативных алгебр. Напомним следующее

Определение 2.1. *Алгеброй* (точнее, *комплексной ассоциативной алгеброй*) называется векторное пространство A над полем $\mathbb{C}$, снабженное билинейным оператором $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto ab$, таким, что $(ab)c = a(bc)$ для всех $a, b, c \in A$. Если $ab = ba$ для всех $a, b \in A$, то A называется *коммутативной*. Элемент $1 \in A$ называется *единицей*, если $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для всех $a \in A$. Алгебра, обладающая единицей, называется *унитальной*.

Как всегда, когда мы имеем дело с неким классом множеств с дополнительной структурой, нужно ввести отображения, которые эту структуру «уважают»:

Определение 2.2. Пусть A, B — алгебры. Отображение $\varphi\colon A \to B$ называется *гомоморфизмом*, если оно линейно, и $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для всех $a, b \in A$. Если A и B унитальны, а 1_A и 1_B — их единицы, то гомоморфизм φ называется *унитальным*, если $\varphi(1_A) = 1_B$.

Алгебры, с которыми нам в дальнейшем предстоит иметь дело, можно условно разделить на два класса: алгебры функций и операторные алгебры. По сути дела, функциональные исчисления от операторов — это гомоморфизмы из первых во вторые. Вот несколько базовых примеров.

Пример 2.1 (алгебры «функций»). 1) Алгебра многочленов[1] $\mathbb{C}[t]$.

2) Алгебра $F(S)$ (обозначаемая также через $\mathbb{C}^S$), состоящая из всех функций на множестве S, снабженная поточечным умножением.

3) Ее подалгебра $\ell^\infty(S)$, состоящая из ограниченных функций.

---

[1] Как учат в курсе алгебры, многочлен — это не функция, а некое «формальное выражние». Но, поскольку наше основное поле $\mathbb{C}$ бесконечно, мы всегда будем отождествлять многочлен с соответствующей функцией на $\mathbb{C}$.

Если на множестве S введена какая-либо дополнительная структура, то в $F(S)$ появляется подалгебра, состоящая из функций, которые с этой структурой согласованы:

4) Алгебра $C(\Omega)$ непрерывных функций на топологическом пространстве Ω.

5) Алгебра $C^\infty(M)$ гладких функций на гладком многообразии M.

6) Алгебра $\mathscr{O}(V)$ голоморфных функций на комплексном многообразии V.

Следующие две алгебры состоят, строго говоря, не из функций, но имеют с алгебрами функций много общего.

7) Алгебра $\mathbb{C}(t)$ рациональных функций.

8) Алгебра $\mathbb{C}[[t]]$ формальных степенных рядов. Напомним, что она состоит из формальных выражений вида $\sum_{n=0}^\infty a_n t^n$ (где $a_n \in \mathbb{C}$ — любые числа), а умножение задается формулой $(\sum_n a_n t^n)(\sum_n b_n t^n) = \sum_n c_n t^n$, где $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ (так что $\mathbb{C}[t]$ является подалгеброй в $\mathbb{C}[[t]]$).

Пример 2.2 (алгебры операторов). На первых порах нам хватит двух примеров:

1) Алгебра $\mathscr{L}(E)$ всех линейных операторов в линейном пространстве E.

2) Алгебра $\mathscr{B}(E)$ всех *ограниченных* линейных операторов в линейном нормированном пространстве E.

Определение 2.3. Пусть A — унитальная алгебра. Элемент $a \in A$ называется *обратимым*, если существует такой элемент $a^{-1} \in A$, что $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Элемент a^{-1} называется *обратным* к a.

Упражнение 2.1. Если a обратим, то у него есть только один обратный элемент.

Множество всех обратимых элементов A образует группу по умножению. В самом деле, если a, b обратимы, то элемент $b^{-1}a^{-1}$ — обратный к ab. Группа обратимых элементов A обозначается через $\operatorname{Inv}(A)$.

Иногда приходится иметь дело с «односторонней обратимостью»:

Определение 2.4. Пусть A — унитальная алгебра. Элемент $a \in A$ называется *обратимым слева* (соответственно, *обратимым справа*), если существует такой элемент $a_\ell^{-1} \in A$ (соответственно, $a_r^{-1} \in A$), что $a_\ell^{-1}a = 1$ (соответственно, $aa_r^{-1} = 1$).

Упражнение 2.2. 1) Пусть a обратим слева. Обязательно ли a_ℓ^{-1} — единственный?

2) Если a обратим и слева, и справа, то он обратим, и $a_\ell^{-1} = a_r^{-1} = a^{-1}$.

3) Если A конечномерна и $a \in A$ обратим слева (или справа), то он обратим.

4) Верно ли предыдущее утверждение для произвольной A?

Посмотрим, как выглядят обратимые элементы в рассмотренных выше примерах.

Пример 2.3. 1) В алгебрах $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}(t)$ любой ненулевой элемент обратим.

2) Многочлен $p \in \mathbb{C}[t]$ обратим $\iff$ $\deg p = 0$ (т.е. p — постоянная функция).

3) Формальный степенной ряд $a = \sum_{n=0}^\infty a_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$ обратим $\iff$ $a_0 \neq 0$ (проверьте!)

4) Элемент $f \in F(S)$ обратим $\iff$ $f(x) \neq 0$ ни для какого $x \in S$. То же самое верно и в алгебрах $C(\Omega)$, $C^\infty(M)$ и $\mathscr{O}(V)$.

5) Элемент $f \in \ell^\infty(S)$ обратим $\iff$ существует $\varepsilon > 0$, такое, что $|f(x)| > \varepsilon$ для всех $x \in S$.

6) Оператор $T \in \mathscr{L}(E)$ обратим $\iff$ он биективен.

7) Пусть E — банахово пространство. Оператор $T \in \mathscr{B}(E)$ обратим $\iff$ он биективен.

Замечание 2.1. В отличие от п.6), который тривиален, п.7) — это следствие (на самом деле, эквивалентная формулировка) *теоремы Банаха об обратном операторе*: если линейный ограниченный оператор между банаховыми пространствами биективен, то обратный оператор тоже ограничен.

Упражнение 2.3. Верно ли утверждение из п.7), если E — (всего лишь) нормированное пространство?

Вот, наконец, основное определение:

Определение 2.5. Пусть A — унитальная алгебра, и пусть $a \in A$. *Спектром* a называется множество

$$\sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \quad \text{необратим}\}.$$

Пример 2.4. Пусть $A = F(S)$, и пусть $f \in A$. С учетом примера 5 (4), мы видим, что

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma(f) \iff f - \lambda 1 \text{ необратим} &\iff \exists x \in S:\ (f - \lambda 1)(x) = 0\\ &\iff \exists x \in S:\ f(x) = \lambda \iff \lambda \in f(S).\end{aligned}$$

Таким образом, $\sigma(f) = f(S)$ (спектр функции совпадает с множеством ее значений). Очевидно, аналогичная ситуация имеет место в алгебрах $C(\Omega)$, $C^\infty(M)$ и $\mathscr{O}(V)$.

Замечание 2.2. Из предыдущего примера видно, что спектр элемента алгебры может быть любым непустым подмножеством в $\mathbb{C}$. В самом деле, если дано $S \subset \mathbb{C}$, $S \neq \varnothing$, то $S = \sigma_A(a)$ для $A = F(S)$ и функции $a(t) = t$.

Упражнение 2.4. Пусть $f \in \ell^\infty(S)$. Тогда $\sigma_{\ell^\infty(S)}(f) = \overline{f(S)}$ (замыкание множества $f(S)$).

Упражнение 2.5. 1) Опишите спектры элементов алгебр $\mathbb{C}[t]$, $\mathbb{C}(t)$ и $\mathbb{C}[[t]]$.

2) Придумайте алгебру A и элемент $a \in A$, спектр которого пуст.

Пример 2.5. Пусть $A = \mathscr{L}(E)$, где E — конечномерное векторное пространство, и пусть $T \in \mathscr{L}(E)$. Тогда $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathbf{1}_E) \neq \neq \{0\}\}$ — множество собственных значений оператора T. Это сразу следует из того факта, что инъективный оператор в конечномерном пространстве обратим.

Упражнение 2.6. Покажите, что в случае бесконечномерного E это, вообще говоря, не так.

Замечание 2.3. Конечно, собственные значения оператора всегда принадлежат его спектру, вне зависимости от того, конечномерно E или нет (неинъективный оператор не может быть обратимым).

Посмотрим, как ведут себя спектры под действием гомоморфизмов.

Предложение 2.1. *Пусть $\varphi\colon A \to B$ — унитальный гомоморфизм.*
(i) *Если $a \in A$ обратим, то и $\varphi(a) \in B$ обратим, и $\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1})$.*
(ii) *$\sigma_B(\varphi(a)) \subset \sigma_A(a)$ для любого $a \in A$.*

Доказательство. (Набросок). Утверждение (i) тривиально, а для доказательства (ii) достаточно применить (i) к элементу $a - \lambda 1$. $\square$

Замечание 2.4. Как следствие из предыдущего предложения, если A — унитальная алгебра, а $B \subset A$ — подалгебра, содержащая единицу A, то $\sigma_A(b) \subset \sigma_B(b)$ для любого $b \in B$. При этом может оказаться, что $\sigma_A(b) \neq \sigma_B(b)$ (ср. упражнение 2.4 и пример 2.4).

Определение 2.6. Пусть A — унитальная алгебра, а $B \subset A$ — подалгебра, содержащая единицу A. Тогда B называется *наполненной*, если каждый элемент B, обратимый в A, обратим и в B.

Предложение 2.2. *Пусть A — унитальная алгебра, B — ее наполненная подалгебра. Тогда $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$ для любого $b \in B$.*

Например, если Ω — топологическое пространство, то $C(\Omega)$ — наполненная подалгебра в $F(\Omega)$. С другой стороны, для любого бесконечного множества S подалгебра $\ell^\infty(S) \subset F(S)$ наполненной не является (см. пример 2.4 и упражнение 2.4).

Еще одно любопытное свойство спектра состоит в том, что спектр произведения «почти» не зависит от порядка сомножителей. Пусть, по-прежнему, A — унитальная алгебра.

Лемма 2.1. *Элемент $1 - ab$ обратим $\iff$ $1 - ba$ обратим.*

Наводящее соображение. Предположим, что $A = \mathbb{C}$, и забудем, что умножение в $\mathbb{C}$ коммутативно. Предположим также, что $|a| < 1$ и $|b| < 1$, и положим $c = (1 - ab)^{-1}$. Тогда $c = \sum_{n=0}^\infty (ab)^n$. С другой стороны,

$$(1 - ba)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty (ba)^n = 1 + b\bigl(1 + ab + (ab)^2 + \ldots\bigr)a = 1 + bca.$$

Доказательство. Пусть $1 - ab$ обратим, и $c = (1 - ab)^{-1}$. Положим $d = 1 + bca$. Прямая проверка показывает, что $d(1 - ba) = (1 - ba)d = 1$, т.е. $d = (1 - ba)^{-1}$. $\square$

Предложение 2.3. *Для любых $a, b \in A$ справедливо равенство $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \notin \sigma(ab)$ и $\lambda \neq 0$. Тогда элемент $1 - \lambda^{-1}ab$ обратим. По лемме, $1 - \lambda^{-1}ba$ обратим. Поэтому и $ba - \lambda 1$ обратим, т.е. $\lambda \notin \sigma(ba)$. $\square$

Упражнение 2.7. 1) Постройте пример алгебры A и элементов $a, b \in A$, таких, что $\sigma(ab) \neq \sigma(ba)$.

2) Если A конечномерна, то $\sigma(ab) = \sigma(ba)$ для любых $a, b \in A$.

2.2. Банаховы алгебры

Итак, в чисто алгебраической ситуации спектр элемента алгебры может быть любым непустым подмножеством комплексной плоскости (замечание 2.2), а может быть и пустым (упражнение 2.5). С другой стороны, мы видели, что спектр любого элемента алгебры $\ell^\infty(S)$ компактен и непуст (упражнение 2.4). Наша ближайшая цель — показать, что последнее свойство имеет место в любой *банаховой* алгебре.

Определение 2.7. *Нормированная алгебра* — это нормированное пространство A над $\mathbb{C}$, снабженное структурой алгебры так, что $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$ для всех $a, b \in A$. Если A унитальна, то дополнительно требуется, чтобы $\|1\| = 1$. *Банахова алгебра* — это полная нормированная алгебра.

Условие $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$ (называемое *субмультипликативностью*, а иногда просто *мультипликативностью* нормы) может показаться на первый взгляд довольно неестественным, не говоря уже об условии $\|1\| = 1$. (Иногда бывает так, что сразу и не скажешь — есть в алгебре единица или нет...). Оказывается, можно добиться выполнения этих двух условий, заменив норму на эквивалентную — лишь бы умножение в A было непрерывно.

Напоминание 2.1. Пусть E, F — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon E \to F$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен, т.е. существует такое $C > 0$, что $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in E$. Наименьшее C с таким свойством называется *нормой* оператора T.

Упражнение 2.8. Пусть E, F, G — нормированные пространства. Докажите, что билинейный оператор $R\colon E \times F \to G$ непрерывен $\iff$ он ограничен, т.е. существует такое $C > 0$, что $\|R(x, y)\| \leqslant C\|x\|\|y\|$ для всех $x \in E$, $y \in F$.

Как следствие, умножение в нормированной алгебре непрерывно.

Напоминание 2.2. Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы на векторном пространстве E. Говорят, что норма $\|\cdot\|_1$ *мажорирует* норму $\|\cdot\|_2$ (и пишут $\|\cdot\|_1 \succ \|\cdot\|_2$ или $\|\cdot\|_2 \prec \|\cdot\|_1$), если существует константа $C > 0$ такая, что $\|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1$ для каждого $x \in E$. Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ *эквивалентны* ($\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$), если $\|\cdot\|_1 \prec \|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_2 \prec \|\cdot\|_1$.

Пусть $\mathscr{T}_i$ — топология на векторном пространстве E, порожденная нормой $\|\cdot\|_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда

$$\|\cdot\|_1 \succ \|\cdot\|_2 \quad \iff \quad \text{топология } \mathscr{T}_1 \text{ не слабее, чем } \mathscr{T}_2.$$

Как следствие, нормы эквивалентны $\iff$ они задают одну и ту же топологию.

Предложение 2.4. *Пусть A — алгебра, снабженная нормой, причем оператор умножения $A \times A \to A$ непрерывен. Тогда на A существует субмультипликативная норма $\|\cdot\|'$, эквивалентная исходной. Если A унитальна, то эту норму можно выбрать так, чтобы $\|1\|' = 1$.*

Доказательство. Ввиду упражнения 2.8, существует $C > 0$, такое, что $\|ab\| \leqslant C\|a\|\|b\|$ для всех $a, b \in A$. Тогда, как легко проверить, норма $\|\cdot\|'' = C\|\cdot\|$ субмультипликативна. Предположим теперь, что A унитальна. Для каждого $a \in A$ рассмотрим оператор $L_a\colon (A, \|\cdot\|'') \to (A, \|\cdot\|'')$, $L_a(b) = ab$, и положим $\|a\|' = \|L_a\|$. Непосредственная проверка показывает, что норма $\|\cdot\|'$ обладает нужными свойствами. □

Посмотрим теперь на несколько основных примеров банаховых алгебр, с которыми нам предстоит работать.

Пример 2.6. Основной для нашего курса пример — это алгебра $\mathscr{B}(E)$ ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве E. Ввиду теоремы Банаха об обратном операторе, $\mathscr{B}(E)$ — наполненная подалгебра в $\mathscr{L}(E)$.

Пример 2.7. Алгебра $\ell^\infty(X)$, где X — произвольное множество, является банаховой относительно равномерной нормы $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Пример 2.8. Пусть Ω — компактное топологическое пространство. Тогда алгебра непрерывных функций $C(\Omega)$ — замкнутая подалгебра в $\ell^\infty(\Omega)$, и, как следствие, банахова алгебра. Отметим, что $C(\Omega)$ — наполненная подалгебра в $\ell^\infty(\Omega)$.

Пример 2.9. Пусть $C^n[a, b]$ — алгебра n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$. Она наделяется нормой $\|f\| = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \|f^{(k)}\|_\infty$, задающей равномерную сходимость со всеми (вплоть до n-ой) производными. Если немного «подправить» норму, то $C^n[a, b]$ становится банаховой алгеброй:

Упражнение 2.9. 1) Докажите полноту $C^n[a, b]$ относительно введенной нормы, а также непрерывность умножения.

2) Укажите субмультипликативную норму на $C^n[a, b]$, эквивалентную исходной.

Пример 2.10 (алгебры измеримых функций). Пусть X — произвольное множество, 2^X — семейство всех его подмножеств. Напомним, что семейство множеств $\mathscr{A} \subset 2^X$ называется *σ-алгеброй*, если оно обладает следующими свойствами:

1) $X \in \mathscr{A}$;
2) если $S \in \mathscr{A}$, то $X \setminus S \in \mathscr{A}$;
3) если $\{S_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{A}$, то $\bigcup_n S_n \in \mathscr{A}$.

Пусть $\mathscr{A}$ — σ-алгебра подмножеств X. Напомним, что функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ называется *$\mathscr{A}$-измеримой*, если $f^{-1}(U) \in \mathscr{A}$ для любого открытого множества $U \subset \mathbb{C}$. Обозначим через $B_{\mathscr{A}}(X)$ множество всех $\mathscr{A}$-измеримых ограниченных функций на X. Из свойств измеримых функций, обычно доказываемых в курсе теории меры, следует, что $B_{\mathscr{A}}(X)$ — замкнутая наполненная подалгебра в $\ell^\infty(X)$ и, следовательно, банахова алгебра относительно равномерной нормы.

Выделим один важный частный случай. Пусть X — топологическое пространство, а $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его борелевских подмножеств, т.е. наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые множества. В этом случае $\mathscr{A}$-измеримые функции называются *борелевскими*, а алгебру $B_{\mathscr{A}}(X)$ мы будем обозначать просто $B(X)$.

Другой важный частный случай возникает, когда на $\mathscr{A}$ задана σ-аддитивная положительная мера, т.е. функция $\mu\colon \mathscr{A} \to [0, +\infty)$, обладающая тем свойством, что $\mu\big(\bigcup_{n=1}^\infty S_n\big) = \sum_{n=1}^\infty \mu(S_n)$ для любой последовательности $\{S_n\} \subset \mathscr{A}$ попарно не пересекающихся множеств. Тройка $(X, \mathscr{A}, \mu)$ называется *пространством с мерой*. В этом случае существует стандартный способ «расширить« (точнее, «пополнить») σ-алгебру $\mathscr{A}$, добавив к ней все *μ-измеримые* множества. Полученная σ-алгебра $\mathfrak{M}$ содержит $\mathscr{A}$, и мера μ единственным образом продолжается до σ-аддитивной меры на $\mathfrak{M}$. Функции на X, измеримые относительно $\mathfrak{M}$, обычно называют *μ-измеримыми* или просто *измеримыми*. Соответствующая банахова алгебра $B_{\mathfrak{M}}(X)$ ограниченных измеримых функций содержит $B_{\mathscr{A}}(X)$, но не совпадает с ней при $\mathfrak{M} \neq \mathscr{A}$. В частности, для отрезка $[a, b]$, снабженного мерой Лебега, $B[a, b] \neq B_{\mathfrak{M}}[a, b]$ (поскольку измеримых по Лебегу множеств больше, чем борелевских).

Пример 2.11 (алгебра $L^\infty(X, \mu)$). Пусть $(X, \mu) = (X, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство с мерой. Напомним, что измеримые функции $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ называются *μ-эквивалентными* (или просто *эквивалентными*), если они совпадают почти всюду, т.е. если $\mu\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = 0$. Класс эквивалентности функции f временно обозначим через $[f]$. Измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ называется *существенно ограниченной*, если она ограничена на некотором множестве $E \subset X$, таком, что $\mu(X \setminus E) = 0$. (По-другому можно сказать и так: функция существенно ограничена, если она эквивалентна ограниченной). *Существенной верхней гранью* функции f называется величина

$$\operatorname{ess\,sup} |f| = \inf\big\{ \|f|_E\|_\infty : E \subset X,\ \mu(X \setminus E) = 0 \big\}.$$

Очевидно, ни свойство быть существенно ограниченной, ни величина $\operatorname{ess\,sup} |f|$ не меняются при замене функции на эквивалентную. Пространство $L^\infty(X, \mu)$ состоит, по определению, из классов эквивалентности существенно ограниченных измеримых функций на X. При этом неважно, рассматривать ли $\mathfrak{M}$-измеримые или только $\mathscr{A}$-измеримые функции: дело в том, что любая $\mathfrak{M}$-измеримая функция эквивалентна $\mathscr{A}$-измеримой. Нетрудно проверить (проверьте, если никогда раньше этого не делали), что $L^\infty(X,\mu)$ — банахово пространство относительно нормы, корректно определенной равенством $\|[f]\| = \operatorname{ess\,sup}|f|$ для любого представителя $f \in [f]$. Также легко проверяется, что $L^\infty(X,\mu)$ — банахова алгебра относительно поточечного умножения. В дальнейшем мы, как обычно, будем допускать некую вольность речи и говорить о «функциях из $L^\infty(X,\mu)$», подразумевая при этом, конечно, что речь идет о классах эквивалентности.

Чтобы выяснить взаимосвязь алгебр из двух предыдущих примеров, нам понадобится ввести понятие факторалгебры. Вначале напомним чисто алгебраическое

Определение 2.8. Пусть A — алгебра. Линейное подпространство $I \subset A$ называется *левым идеалом* (соответственно, *правым идеалом*), если $ab \in I$ для любых $a \in A$ и $b \in I$ (соответственно, для любых $a \in I$ и $b \in A$). Подпространство, являющееся одновременно и левым, и правым идеалом, называется *двусторонним идеалом*.

Если $I \subset A$ — двусторонний идеал, то факторпространство A/I является алгеброй относительно умножения, корректно определенного формулой $(a+I)(b+I) = ab + I$.

Пусть теперь E — банахово пространство, а $E_0 \subset E$ — замкнутое линейное подпространство. На факторпространстве E/E_0 имеется норма, заданная формулой $\|x + E_0\| = \inf\{\|x+y\| : y \in E_0\}$. Иными словами, норма класса эквивалентности $x + E_0$ равна расстоянию от него до нуля. Топология, задаваемая этой нормой — это фактортопология, т.е. сильнейшая топология, в которой отображение $E \to E/E_0$, $x \mapsto x + E_0$ непрерывно. Относительно введенной нормы E/E_0 является банаховым пространством (проверьте!)

Наконец, пусть A — банахова алгебра, а $I \subset A$ — замкнутый двусторонний идеал. Тогда A/I — это алгебра и одновременно банахово пространство.

Упражнение 2.10. Норма на A/I субмультипликативна. Если A унитальна и $\|1_A\| = 1$, то и $\|1_{A/I}\| = 1$.

Таким образом, факторалгебра A/I банаховой алгебры A по любому замкнутому двустороннему идеалу I сама является банаховой алгеброй.

Упражнение 2.11. Пусть (X,μ) — пространство с мерой. Положим $I_0 = \{f \in B_{\mathscr{A}}(X) : f = 0 \quad \text{почти всюду}\}$. Проверьте, что I_0 — замкнутый идеал в $B_{\mathscr{A}}(X)$, и что факторалгебра $B_{\mathscr{A}}(X)/I_0$ изометрически изоморфна $L^\infty(X,\mu)$.

Предложение 2.5. *Существенно ограниченная функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ является обратимым элементом алгебры $L^\infty(X,\mu)$ тогда и только тогда, когда $\mu(f^{-1}(U)) = 0$ для некоторой окрестности нуля $U \subset \mathbb{C}$.*

Доказательство. Очевидно, f — обратимый элемент $L^\infty(X,\mu)$ тогда и только тогда, когда функция $1/f$ определена и ограничена на некотором подмножестве $E \subset X$, таком, что $\mu(X \setminus E) = 0$. Последнее условие эквивалентно тому, что для некоторого $\varepsilon > 0$ $|f(x)| \geqslant \varepsilon$ всюду на E. Следовательно, в качестве нужного U подойдет ε-окрестность нуля в $\mathbb{C}$. Обратно, если U с указанным свойством существует, то можно положить $E = X \setminus f^{-1}(U)$. □

Определение 2.9. Пусть $f\colon X \to \mathbb{C}$ — измеримая функция. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *существенным значением* f, если $\mu(f^{-1}(U)) > 0$ для любой окрестности $U \ni \lambda$, $U \subset \mathbb{C}$.

Следствие 2.1. *Пусть $f \in L^\infty(X,\mu)$. Тогда $\sigma(f)$ совпадает с множеством ее существенных значений.*

Упражнение 2.12. Убедитесь, что множество существенных значений существенно ограниченной измеримой функции — непустой компакт в $\mathbb{C}$.

Из примеров, приведенных на этой и прошлой лекциях, видно, что для многих функциональных алгебр спектры их элементов или совпадают, или «почти совпадают» с множествами значений соответствующих функций. Скоро мы увидим, что это «почти» можно убрать, если надлежащим образом «подправить» область определения функции. А сейчас посмотрим на пример алгебры, в которой, на первый взгляд, это совсем не так.

Пример 2.12 (две банаховых алгебры аналитических функций). Пусть K — компактное подмножество в $\mathbb{C}$, $\operatorname{Int} K$ — его внутренность. Рассмотрим следующие замкнутые подалгебры в $C(K)$:

$$\mathscr{P}(K) = \overline{\{p|_K : p \in \mathbb{C}[t]\}} \qquad (\text{замыкание в } C(K)),$$
$$\mathscr{A}(K) = \{f \in C(K) : f|_{\operatorname{Int} K} \quad \text{голоморфна}\}.$$

Очевидно, $\mathscr{P}(K) \subset \mathscr{A}(K)$, и $\mathscr{A}(K)$ — наполненная подалгебра в $C(K)$.

Положим $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Алгебра $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$ называется *дисковой алгеброй*.

Упражнение 2.13. Проверьте, что
1) $\mathscr{P}(\overline{\mathbb{D}}) = \mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$;
2) $\mathscr{P}(\mathbb{T}) \neq \mathscr{A}(\mathbb{T})$;
3) алгебры $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ и $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$ изометрически изоморфны.

Упражнение 2.14. Покажите, что спектр $\sigma_{\mathscr{P}(\mathbb{T})}(f)$ функции $f \in \in \mathscr{P}(\mathbb{T})$ не совпадает с множеством $f(\mathbb{T})$, если только f не постоянна. Как следствие, подалгебра $\mathscr{P}(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T})$ не является наполненной. Опишите множество $\sigma_{\mathscr{P}(\mathbb{T})}(f)$.

2.3. Спектры элементов банаховых алгебр

Прежде чем говорить о спектрах, посмотрим на некоторые общие свойства группы обратимых элементов в банаховой алгебре.

Теорема 2.1. *Пусть A — унитальная банахова алгебра.*
(i) *Если $a \in A$, и $\|a\| < 1$, то $1 - a$ обратим, и $(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$.*
(ii) *Множество обратимых элементов $\mathrm{Inv}(A)$ открыто в A.*
(iii) *Отображение $\mathrm{Inv}(A) \to \mathrm{Inv}(A)$, $a \mapsto a^{-1}$ непрерывно.*

Доказательство. (i) Поскольку $\sum_{k=0}^{n} \|a^k\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|a\|^k$, а A полна, мы видим, что указанный в (i) ряд сходится в A при $\|a\| < 1$ к некоторому $b \in A$. Для каждого n положим $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$. Легко видеть, что $(1-a)S_n = S_n(1-a) = 1 - a^{n+1}$. При $n \to \infty$ получаем $(1-a)b = b(1-a) = 1$, т.е. $b = (1-a)^{-1}$, как и требовалось.

(ii) Для каждого $a \in \mathrm{Inv}(A)$ отображение $L_a \colon A \to A$, $b \mapsto ab$ является гомеоморфизмом A на себя и переводит $\mathrm{Inv}(A)$ в $\mathrm{Inv}(A)$. Поэтому, если множество $U \subset \mathrm{Inv}(A)$ открыто в A и содержит единицу (а такое U существует в силу (i)), то $L_a(U)$ открыто в A и содержит a.

(iii) Проверим, что отображение $a \mapsto a^{-1}$ непрерывно в единице. Для этого надо показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что при $\|a - 1\| < \delta$, $a \in \mathrm{Inv}(A)$ выполнено $\|a^{-1} - 1\| < \varepsilon$.

Возьмем сперва произвольный $b \in A$, такой, что $\|b\| < 1$. Тогда из (i) следует, что $(1-b)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b^n$, откуда

$$\|(1-b)^{-1} - 1\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|b\|^n = \frac{\|b\|}{1 - \|b\|}. \tag{2.1}$$

Пусть $\delta > 0$ таково, что $\delta < 1$ и $\delta/(1-\delta) < \varepsilon$. Тогда, если $\|a - 1\| < \delta$, то, подставляя $b = 1 - a$ в (2.1), мы получаем $\|a^{-1} - 1\| < \varepsilon$, как и требовалось. Таким образом, отображение $a \mapsto a^{-1}$ непрерывно в единице. Остается воспользоваться следующим общим фактом:

Упражнение 2.15. Пусть G — группа, снабженная топологией, причем операция умножения $G \times G \to G$ непрерывна, а операция взятия обратного $G \to G$ непрерывна в единице. Тогда операция взятия обратного непрерывна на G. $\square$

В качестве забавного приложения установим один результат об «автоматической непрерывности». Вначале напомним следующее

Определение 2.10. Пусть A — алгебра над $\mathbb{C}$. Гомоморфизмы из A в $\mathbb{C}$ называются ее *характерами*.

Замечание 2.5. Заметим, что ненулевой характер унитальной алгебры унитален (поскольку он сюръективен).

Следствие 2.2. *Любой характер унитальной банаховой алгебры непрерывен, и его норма не превосходит единицы.*

Доказательство. Если характер $\chi\colon A \to \mathbb{C}$ разрывен, или же если он непрерывен, но $\|\chi\| > 1$, то существует $a \in A$, $\|a\| < 1$, такой, что $\chi(a) = 1$. По теореме 2.1, элемент $1 - a$ обратим. Следовательно, таков же и $\chi(1 - a) \in \mathbb{C}$. Но последний элемент равен нулю. Противоречие. $\square$

Замечание 2.6. Для сравнения напомним, что на любом бесконечномерном нормированном пространстве существует разрывный линейный функционал.

Упражнение 2.16. Какие утверждения из теоремы 2.1 сохраняют силу для нормированных алгебр? Сохраняет ли силу следствие 2.2?

Теперь обратимся к спектрам.

Теорема 2.2. *Пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$ — ее элемент. Тогда*

(i) *$\sigma(a)$ — компактное подмножество в $\mathbb{C}$;*

(ii) *если $\lambda \in \sigma(a)$, то $|\lambda| \leqslant \|a\|$.*

Доказательство. Начнем с (ii). Если $|\lambda| > \|a\|$, то $\|\lambda^{-1}a\| < 1$, поэтому $1 - \lambda^{-1}a$ обратим по предыдущей теореме. Значит, и $a - \lambda 1$ обратим, т.е. $\lambda \notin \sigma(a)$. Это доказывает (ii) и, как следствие, ограниченность $\sigma(a)$. Осталось доказать его замкнутость. Для этого рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathbb{C} \to A$, $\varphi(\lambda) = a - \lambda 1$, и заметим, что множество $\mathbb{C} \setminus \sigma(a) = \varphi^{-1}(\mathrm{Inv}(A))$ открыто ввиду непрерывности φ и предыдущей теоремы. Следовательно, $\sigma(a)$ замкнуто, как и требовалось. $\square$

Итак, спектр любого элемента в банаховой алгебре компактен. Покажем теперь, что он непуст. Для этого введем следующее понятие.

Определение 2.11. Пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$ — ее элемент. *Резольвентной функцией* a называется функция $R_a\colon \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to A$, $R_a(\lambda) = (a - \lambda 1)^{-1}$.

Лемма 2.2. *R_a непрерывна на $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$, и $\lim_{\lambda\to\infty} R_a(\lambda) = 0$.*

Доказательство. Непрерывность R_a сразу следует из непрерывности взятия обратного в $\mathrm{Inv}(A)$ (теорема 2.1). Далее,

$$\|R_a(\lambda)\| = \|(a - \lambda 1)^{-1}\| = |\lambda|^{-1}\, \|(1 - \lambda^{-1} a)^{-1}\|.$$

Первый сомножитель в последнем выражении стремится к нулю при $\lambda \to \infty$, а второй — к единице в силу непрерывности взятия обратного. Дальше ясно. □

Оказывается, резольвентная функция не только непрерывна, но и голоморфна в следующем смысле:

Определение 2.12. Пусть E — банахово пространство, а $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Функция $\varphi\colon U \to \mathbb{C}$ называется *голоморфной*, если для каждого $z_0 \in U$ существует предел $\lim_{z\to z_0} \dfrac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0}$. Этот предел называется *производной* φ в точке z_0 и обозначается $\varphi'(z_0)$.

Замечание 2.7. Если $\varphi\colon U \to E$ — голоморфная функция, то для любого непрерывного линейного функционала $f \in E^*$ функция $f \circ \varphi\colon U \to \mathbb{C}$ голоморфна в обычном смысле, и $(f \circ \varphi)'(z) = f(\varphi'(z))$ для всех $z \in U$. Верно и обратное утверждение (т.е. из голоморфности $f \circ \varphi$ для всех $f \in E^*$ следует голоморфность φ), но оно нам не понадобится.

Предложение 2.6 (тождество Гильберта). *Резольвентная функция удовлетворяет тождеству $R_a(\lambda) - R_a(\mu) = (\lambda - \mu) R_a(\lambda) R_a(\mu)$.*

Доказательство. Достаточно домножить обе части равенства слева на $a - \lambda 1$ и справа на $a - \mu 1$. □

Отсюда и из непрерывности резольвентной функции немедленно следует

Предложение 2.7. *Резольвентная функция R_a голоморфна на $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$, и $R_a'(z) = R_a(z)^2$ для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$.*

Напоминание 2.3. Прежде чем доказывать непустоту спектра, напомним одно важное следствие из теоремы Хана–Банаха: *если E — нормированное пространство, то для любого $x \in E$, $x \neq 0$ найдется функционал $f \in E^*$, такой, что $f(x) \neq 0$.*

Теорема 2.3. *Спектр любого элемента унитальной банаховой алгебры непуст.*

Доказательство. Предположим противное; пусть $\sigma(a) = \varnothing$. Зафиксируем функционал $f \in A^*$ и положим $\varphi_f = f \circ R_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Из предложения 2.7, замечания 2.7 и леммы 2.2 следует, что φ_f — это целая функция, стремящаяся к нулю на бесконечности. По теореме Лиувилля, $\varphi_f \equiv 0$. Поскольку f произволен, вышеупомянутое следствие из теоремы Хана–Банаха влечет $R_a(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. С другой стороны, $R_a(\lambda)$ обратим. Противоречие. □

Вот одно любопытное приложение.

Теорема 2.4 (Гельфанд, Мазур). *Пусть A — банахова алгебра с делением (т.е. унитальная банахова алгебра, в которой любой ненулевой элемент обратим). Тогда A изоморфна $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Возьмем произвольный $a \in A$. Поскольку $\sigma(a) \neq \varnothing$, элемент $a - \lambda 1$ необратим для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Но A — алгебра с делением; значит, $a - \lambda 1 = 0$, т.е. $a = \lambda 1$. Ввиду произвольности $a \in A$, получаем $A = \mathbb{C}1$, как и требовалось. □

Упражнение 2.17. Верна ли теорема Гельфанда–Мазура для нормированных алгебр?

2.4. Полиномиальное и рациональное исчисления

Вернемся ненадолго из функционального анализа в чистую алгебру. Пусть A — унитальная алгебра, $a \in A$ — фиксированный элемент.

Следующее понятие уже упоминалось во введении в контексте линейных операторов.

Определение 2.13. *Полиномиальным исчислением* от a называется унитальный гомоморфизм $\gamma_p : \mathbb{C}[t] \to A$, такой, что $\gamma_p(t) = a$.

Предложение 2.8. *Для любого $a \in A$ полиномиальное исчисление от a существует и единственно.*

В дальнейшем для любого $f \in \mathbb{C}[t]$ вместо $\gamma_p(f)$ мы будем иногда писать $f(a)$.

Теорема 2.5 (об отображении спектра). *Если $\sigma(a) \neq \varnothing$, то $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ для любого $f \in \mathbb{C}[t]$.*

Для доказательства теоремы понадобится следующая

Лемма 2.3. *Пусть* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *— коммутирующие элементы. Тогда элемент* $a_1 \ldots a_n$ *обратим* $\iff$ *все элементы* $a_1, \ldots, a_n$ *обратимы.*

Упражнение 2.18. Докажите эту лемму.

Упражнение 2.19. 1) Покажите, что для некоммутирующих $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n$ утверждение леммы перестает быть верным.

2) Покажите, что при $\dim A < \infty$ лемма верна и для некоммутирующих $a_1, \ldots, a_n$.

Доказательство теоремы. Случай $\deg f = 0$ тривиален (почему?). Пусть $\deg f > 0$. Возьмем произвольное $\lambda \in \mathbb{C}$ и разложим многочлен $f - \lambda$ на множители: $f(t) - \lambda = c(t - \lambda_1) \ldots (t - \lambda_n)$, где $c \neq 0$. Очевидно, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = f^{-1}(\lambda)$. Поскольку $f(a) - \lambda 1 = c(a - \lambda_1 1) \ldots (a - \lambda_n 1)$, из леммы следует, что

$$\lambda \in \sigma(f(a)) \iff f(a) - \lambda 1 \quad \text{необратим} \iff \exists i : a - \lambda_i 1 \quad \text{необратим}$$
$$\iff \sigma(a) \cap f^{-1}(\lambda) \neq \varnothing \iff \lambda \in f(\sigma(a)),$$

как и требовалось. □

Упражнение 2.20. 1) В унитальной банаховой алгебре не существует элементов a, b, коммутатор которых $[a, b] = ab - ba$ равен 1.

2) Тем не менее, элементы с указанным свойством существуют в алгебре $\mathscr{L}(E)$, где E — подходящее (а на самом деле — любое) бесконечномерное векторное пространство.

Замечание 2.8. Во введении уже упоминалось, что наблюдаемые в квантовой механике интерпретируются как самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. При этом оказывается, что координата частицы q и ее импульс p должны быть связаны соотношением $[q, p] = i\hbar 1$, где $\hbar$ — постоянная Планка. Последнее соотношение называется *коммутационным соотношением Гейзенберга* и отражает тот факт, что координата и импульс не могут быть одновременно точно измерены («принцип неопределенности»). Из предыдущего упражнения следует, что ограниченных операторов с таким свойством не существует. Поэтому для нужд квантовой механики приходится использовать неограниченные операторы (причем, как правило, не всюду определенные), а с ними намного сложнее работать...

Вот еще одно полезное свойство спектра:

Упражнение 2.21. 1) Пусть A — унитальная алгебра, $a \in A$ — обратимый элемент. Тогда $\sigma(a^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(a)\}$. (Или, более коротко, $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}$.)

2) Пусть E — банахово пространство, $T \in \mathscr{B}(E)$ — обратимый изометрический оператор. Тогда $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$.

Перейдем теперь от полиномиального исчисления к рациональному. Для произвольного подмножества $M \subset \mathbb{C}$ обозначим через $R(M)$ подалгебру в $\mathbb{C}(t)$, состоящую из рациональных функций с полюсами вне M. Иначе говоря,

$$R(M) = \{f \in \mathbb{C}(t) : \exists p, q \in \mathbb{C}[t],\ f = p/q,\ q(z) \neq 0 \, \forall z \in M\}.$$

Пусть, как и прежде, A — унитальная алгебра, $a \in A$ — фиксированный элемент.

Определение 2.14. *Рациональным исчислением* от a на M называется унитальный гомоморфизм $\gamma_r \colon R(M) \to A$, такой, что $\gamma_r(t) = a$.

Если рациональное исчисление от a на M существует, то оно является продолжением полиномиального в очевидном смысле. Поэтому для $f \in R(M)$ вместо $\gamma_r(f)$ обычно пишут просто $f(a)$.

Теорема 2.6. *Рациональное исчисление от a на M существует тогда и только тогда, когда $\sigma(a) \subset M$; при этом оно единственно.*

Доказательство. (Набросок). Предположим, что $\sigma(a) \subset M$. Возьмем $f \in R(M)$ и представим ее в виде $f = p/q$, где p и q — полиномы, и q не обращается в нуль на M. Из теоремы об отображении спектра следует, что $q(a) \in A$ обратим. Положим $\gamma_r(f) = p(a)q(a)^{-1}$. Непосредственная проверка показывает, что $\gamma_r \colon R(M) \to A$ — корректно определенный гомоморфизм. Единственность γ_r очевидна (см. предложение 2.1 (i)). Необходимость условия $\sigma(a) \subset M$ проверьте сами в качестве упражнения. $\square$

Замечание 2.9. (Для знакомых с основами коммутативной алгебры). Заметим, что алгебра $R(M)$ — это в точности кольцо частных $\mathbb{C}[t]$ относительно мультипликативной системы $S = \{q \in \mathbb{C}[t] : q(z) \neq 0 \ \forall z \in M\}$. Поэтому существование и единственность рационального исчисления сразу следует из универсального свойства колец частных с учетом того, что $\gamma_p(q)$ обратим в A для любого $q \in S$.

Следующая теорема — это, по сути, тривиальная переформулировка теоремы 2.6. Польза от такой переформулировки в том, что она позволяет взглянуть на теорему о рациональном исчислении не с «индивидуальной», а с «коллективной» точки зрения.

Теорема 2.7. *Пусть A — унитальная алгебра, $M \subset \mathbb{C}$ — произвольное подмножество. Существуют канонические биекции*

$$\Big\{ a \in A : \sigma(a) \subset M \Big\} \quad \rightleftarrows \quad \left\{ \begin{matrix} \textit{унитальные гомоморфизмы} \\ R(M) \to A \end{matrix} \right\}$$

Здесь стрелка, действующая слева направо, сопоставляет элементу $a \in A$ его рациональное исчисление на M, а стрелка, действующая справа налево, сопоставляет гомоморфизму $\pi \colon R(M) \to A$ элемент $\pi(t)$, где $t(z) = z$ для любого $z \in M$.

Каждой функции $f \in R(M)$ можно присвоить значение в произвольной точке $z \in M$. Для этого представим f в виде $f = p/q$, где $p, q \in \mathbb{C}[t]$ и q не обращается в нуль на M, и положим по определению $f(z) = p(z)/q(z)$. Получаем «настоящую» функцию $\tilde{f}$ на M, заданную по правилу $\tilde{f}(z) = f(z)$ для всех $z \in M$. Сопоставление $f \mapsto \tilde{f}$ является унитальным гомоморфизмом из $R(M)$ в $\mathbb{C}^M$. Отметим, что этот гомоморфизм инъективен тогда и только тогда, когда M бесконечно; в этом случае $R(M)$ можно считать подалгеброй в $\mathbb{C}^M$.

Упражнение 2.22 (теорема об отображении спектра). Пусть $\varnothing \neq \sigma(a) \subset M$. Докажите, что $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ для любой $f \in R(M)$.

Замечание 2.10. Очевидно, f является обратимым элементом $R(M)$ тогда и только тогда, когда $f(z) \neq 0$ нигде на M, т.е. когда $\tilde{f}$ — обратимый элемент $\mathbb{C}^M$. Поэтому

$$\sigma_{R(M)}(f) = \sigma_{\mathbb{C}^M}(\tilde{f}) = f(M).$$

А теперь положим в предыдущем упражнении $M = \sigma(a)$. С учетом сказанного выше, равенство $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ можно переписать так:

$$\sigma_A(\gamma_r(f)) = \sigma_{R(\sigma(a))}(f).$$

Иными словами, гомоморфизм γ_r «сохраняет спектр» (напомним, что в общем случае гомоморфизм «не увеличивает спектр»; ср. предложение 2.1 (ii)). С явлениями такого рода мы встретимся еще неоднократно.

2.5. Спектральный радиус

Пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$ — фиксированный элемент.

Определение 2.15. Число $r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$ называется *спектральным радиусом* элемента $a \in A$.

Поскольку $\sigma(a)$ — непустой компакт в $\mathbb{C}$, спектральный радиус любого элемента определен и конечен. Кроме того, из доказанного на прошлой лекции (теорема 2 (ii)) сразу следует, что $r(a) \leqslant \|a\|$.

Пример 2.13. Легко видеть, что в алгебре $A = \ell^\infty(X)$ для любого $a \in A$ справедливо равенство $r(a) = \|a\|$. То же самое верно и в любой ее наполненной подалгебре — в частности, в алгебрах $C(\Omega)$ и $B_{\mathscr{A}}(X)$.

Упражнение 2.23. Верно ли, что $r(a) = \|a\|$ в алгебре $L^\infty(X, \mu)$? А в алгебре $C^n[a, b]$?

Упражнение 2.24. Пусть $A = \mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$, где $\mathbb{C}^n$ снабжено евклидовой нормой. Предположим, что оператор $T \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$ записывается в некотором ортонормированном базисе диагональной матрицей. Докажите, что $r(T) = \|T\|$.

Пример 2.14. Пусть $A = \mathscr{B}(\mathbb{C}^2)$, а оператор T записывается матрицей $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (см. пример 1.2). Тогда $\sigma(T) = \{0\}$, поэтому и $r(T) = 0$; с другой стороны, $\|T\| \neq 0$.

Кстати, примеров такого рода можно построить довольно много:

Упражнение 2.25. Пусть A — произвольная унитальная алгебра, $a \in A$ — нильпотентный элемент (т.е. $a^n = 0$ для некоторого n). Тогда $\sigma(a) = \{0\}$.

Напоминание 2.4. Прежде чем доказывать следующую теорему, напомним одно следствие из теоремы Банаха–Штейнгауза:

Пусть E — нормированное пространство, $M \subset E$ — подмножество. Предположим, что для любого $f \in E^*$ множество $f(M) \subset \mathbb{C}$ ограничено. Тогда и M ограничено.

Теорема 2.8 (формула Бёрлинга). *Пусть A — унитальная банахова алгебра, и пусть $a \in A$. Тогда*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_n \|a^n\|^{1/n}.$$

Доказательство. Достаточно установить, что $r(a) \leqslant \inf_n \|a^n\|^{1/n}$ и $r(a) \geqslant \overline{\lim}_n \|a^n\|^{1/n}$; отсюда будет следовать как существование указанного в формулировке предела, так и его совпадение с $r(a)$.

Если $\lambda \in \sigma(a)$, то $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ ввиду теоремы об отображении спектра. Поэтому $|\lambda^n| \leqslant \|a^n\|$ и $|\lambda| \leqslant \|a^n\|^{1/n}$. Беря inf по $n \in \mathbb{N}$, а затем sup по $\lambda \in \sigma(a)$, получаем неравенство $r(a) \leqslant \inf_n \|a^n\|^{1/n}$.

Для доказательства второго неравенства возьмем круг $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1/r(a)\}$ (если $r(a) = 0$, то $D = \mathbb{C}$), зафиксируем функционал $f \in A^*$ и рассмотрим функцию $\psi_f(\lambda) = f\big((1 - \lambda a)^{-1}\big)$, заданную на D. Напомним, что функция $\lambda \mapsto (1 - \lambda a)^{-1} = -\lambda^{-1} R_a(\lambda^{-1})$ голоморфна в $D \setminus \{0\}$ и стремится к 1 при $\lambda \to 0$ (см. прошлую лекцию). Следовательно, ψ_f голоморфна в D (по теореме об устранимой особенности) и поэтому разлагается в ряд Тэйлора: $\psi_f(\lambda) = \sum_n c_n \lambda^n$ для всех $\lambda \in D$.

Если $|\lambda| < 1/\|a\|$, то $(1 - \lambda a)^{-1} = \sum_n (\lambda a)^n$ (см. теорему 1 из лекции 2). Поэтому $\psi_f(\lambda) = \sum_n f(a^n)\lambda^n$ для всех таких λ. Пользуясь единственностью ряда Тэйлора, заключаем, что $c_n = f(a^n)$ для всех n.

Зафиксируем произвольное $\lambda \in D$, $\lambda \neq 0$. Поскольку ряд $\sum_n f(a^n)\lambda^n$ сходится, последовательность $\{f(a^n)\lambda^n\}$ ограничена. Но это верно для любого $f \in A^*$, поэтому из теоремы Банаха–Штейнгауза следует, что последовательность $\{\lambda^n a^n\}$ ограничена в A, т.е. $\|\lambda^n a^n\| \leqslant C$ для некоторого $C > 0$ и всех n. Отсюда $\|a^n\|^{1/n} \leqslant C^{1/n}/|\lambda|$, и, переходя к верхнему пределу, получаем $\overline{\lim}_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant 1/|\lambda|$. Ввиду произвольности $\lambda \in D \setminus \{0\}$, отсюда следует, что $\overline{\lim}_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant r(a)$, как и требовалось.

Итак, оба нужных неравенства установлены, и теорема доказана. □

Следствие 2.3. (Ср. упр. 2.25). $\sigma(a) = 0 \iff \lim_n \|a^n\|^{1/n} = 0$.

Определение 2.16. Элемент $a \in A$ называется *квазинильпотентным*, если он удовлетворяет условию предыдущего следствия.

Упражнение 2.26. В каких банаховых алгебрах из приведенных ранее примеров существуют квазинильпотентные элементы, не являющиеся нильпотентными?

Напомним, что спектр элемента может уменьшиться, если его рассматривать как элемент некоторой большей алгебры. Тем не менее, из доказанной теоремы следует, что спектральный радиус уменьшиться не может:

Следствие 2.4. *Пусть A — унитальная банахова алгебра, $B \subset A$ — замкнутая подалгебра, $1_A \in B$. Тогда $r_B(b) = r_A(b)$ для любого $b \in B$.*

Следующее упражнение усиливает это следствие. В дальнейшем для каждого подмножества $M \subset \mathbb{C}$ символом ∂M мы будем обозначать его границу.

Упражнение 2.27. В условиях предыдущего следствия докажите, что $\partial\sigma_B(b) \subset \partial\sigma_A(b)$ для любого $b \in B$.

Определение 2.17. Пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$. Объединение $\sigma(a)$ и всех ограниченных компонент связности его дополнения называется *полным спектром* a и обозначается $\sigma_f(a)$.

С геометрической точки зрения, $\sigma_f(a)$ получается из $\sigma(a)$ «заклеиванием дыр».

Упражнение 2.28. В условиях следствия 2.4 докажите, что $\sigma_{f,B}(b) = \sigma_{f,A}(b)$ для любого $b \in B$.

Полезно посмотреть, во что превращается результат последнего упражнения при $A = \mathscr{A}(K)$ и $B = \mathscr{P}(K)$ (например, для $K = \mathbb{T}$ и функции $a(z) = z$).

Литературные указания

Большая часть материала этой главы содержится в книге А. Я. Хелемского [29]; см. также его недавний учебник [30]. Хорошее, краткое и доступное введение в теорию банаховых алгебр — дополнение В. М. Тихомирова к книге [15]. Добротное (хотя и несколько педантичное) изложение есть в книге Бурбаки [4]. Классическая монография по банаховым алгебрам, до сих пор не утратившая своего значения — книга М. А. Наймарка [21]. Банаховы алгебры аналитических функций $\mathscr{A}(K)$ и $\mathscr{P}(K)$ (см. пример 2.12) подробно обсуждаются в книге Т. Гамелина [5]. По поводу основных понятий теории банаховых алгебр см. также [26, 20, 10].

3. СПЕКТРЫ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ЧАСТИ

3.1. Точечный, непрерывный и остаточный спектры. Операторы умножения

От общих банаховых алгебр перейдем теперь к алгебре ограниченных операторов $\mathscr{B}(E)$, где E — банахово пространство, и посмотрим, как устроены спектры некоторых «классических» операторов.

Пример 3.1 (диагональный оператор). Пусть E — это либо ℓ^p (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$), либо c_0 (напомним, что c_0 — это пространство всех стремящихся к нулю последовательностей, снабженное sup-нормой). Таким образом, элементы E — это последовательности $x = (x_n)$, удовлетворяющие тем или иным условиям. Каждой ограниченной последовательности $\lambda \in \ell^\infty$ соответствует оператор $M_\lambda \in \mathscr{B}(E)$, действующий по правилу $M_\lambda(x) = (\lambda_n x_n)$ для всех $x = (x_n) \in E$.

Упражнение 3.1. Отображение $\varphi\colon \ell^\infty \to \mathscr{B}(E)$, $\lambda \mapsto M_\lambda$ является изометрическим унитальным гомоморфизмом банаховых алгебр. В частности, $\|M_\lambda\| = \|\lambda\|_\infty = \sup_n |\lambda_n|$.

Предложение 3.1. *Гомоморфизм φ, описанный в предыдущем упражнении, «сохраняет спектр»: $\sigma_{\mathscr{B}(E)}(\varphi(\lambda)) = \sigma_{\ell^\infty}(\lambda)$. Иными словами, $\sigma(M_\lambda) = \overline{\{\lambda_n\}}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\operatorname{Im}\varphi$ — наполненная подалгебра в $\mathscr{B}(E)$, т.е. что для любого необратимого $\lambda \in \ell^\infty$ оператор M_λ необратим.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $e_n \in E$ последовательность с единицей на n-ом месте и нулем на остальных, и заметим, что $M_\lambda e_n = \lambda_n e_n$. Если $\lambda \in \ell^\infty$ необратим, т.е. $0 \in \overline{\{\lambda_n\}}_{n\in\mathbb{N}}$, то возможны следующие случаи:

1) $\lambda_n = 0$ для некоторого n. В этом случае $M_\lambda e_n = 0$, поэтому M_λ не инъективен, а, значит, не обратим.

2) $\lambda_n \neq 0$ ни для какого n. В этом случае существует подпоследовательность $\{\lambda_{n_k}\} \subset \{\lambda_n\}$, стремящаяся к нулю. Поэтому $M_\lambda(e_{n_k}) = \lambda_{n_k} e_{n_k} \to 0$ при $k \to \infty$. Но обратимый оператор, будучи гомеоморфизмом, не может переводить последовательность векторов единичной длины в последовательность, стремящуюся к нулю. Поэтому M_λ необратим. $\square$

Пример 3.2 (оператор умножения на функцию). Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть $E = L^p(X, \mu)$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$). Каждая измеримая существенно ограниченная функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ задает оператор $M_f \in \mathscr{B}(E)$, действующий по правилу $(M_f g)(x) = f(x)g(x)$.

Упражнение 3.2. Отображение $\varphi\colon L^\infty(X, \mu) \to \mathscr{B}(E)$, $f \mapsto M_f$ является изометрическим унитальным гомоморфизмом банаховых алгебр. В частности, $\|M_f\| = \|f\| = \operatorname{ess\,sup} |f|$.

Упражнение 3.3. Гомоморфизм φ, описанный в предыдущем упражнении, «сохраняет спектр»: $\sigma_{\mathscr{B}(E)}(\varphi(f)) = \sigma_{L^\infty(X,\mu)}(f)$. Иными словами, $\sigma(M_f)$ — это множество существенных значений f.

Посмотрим еще раз на доказательство предложения 3.1. На этом примере хорошо видно, что спектр оператора естественно разбить на несколько частей в зависимости от того, по какой причине соответствующий оператор $T - \lambda\mathbf{1}$ необратим.

Вообще, пусть S — произвольный ограниченный оператор в E. Почему он может оказаться необратимым? Во-первых, может оказаться, что $\operatorname{Ker} S \neq 0$ (в конечномерном случае этим все и исчерпывается — инъективный оператор в конечномерном пространстве обратим). Во-вторых, возможен случай, когда $\operatorname{Ker} S = 0$, но $\operatorname{Im} S \neq E$ (приведите пример!) Его удобно разбить на два подслучая: либо $\operatorname{Im} S$ плотен в E, либо нет. В применении к оператору $S = T - \lambda\mathbf{1}$ это приводит к следующему определению.

Определение 3.1. *Точечным спектром* оператора $T \in \mathscr{B}(E)$ называется множество

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Ker}(T - \lambda\mathbf{1}) \neq 0\}.$$

Непрерывным спектром T называется множество

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda\mathbf{1})} = E,\ \operatorname{Im}(T - \lambda\mathbf{1}) \neq E\}.$$

Наконец, *остаточным спектром* T называется множество

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda\mathbf{1})} \neq E\}.$$

Очевидно, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \sqcup \sigma_c(T) \sqcup \sigma_r(T)$. Заметим, что точечный спектр $\sigma_p(T)$ — это в точности множество собственных значений T.

Если E конечномерно, то $\sigma(T)=\sigma_p(T)$, а $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$ пусты. Посмотрим, что происходит в бесконечномерном случае.

Предложение 3.2. *Пусть $E=\ell^p$ (где $1\leqslant p<\infty$) или $E=c_0$, и пусть $M_\lambda\in\mathscr{B}(E)$ — оператор умножения на ограниченную последовательность $\lambda\in\ell^\infty$ (см. пример 3.1). Тогда $\sigma_p(M_\lambda)=\{\lambda_n\}$, $\sigma_c(M_\lambda)=\overline{\{\lambda_n\}}\setminus\{\lambda_n\}$ и $\sigma_r(M_\lambda)=\varnothing$.*

Доказательство. Поскольку $M_\lambda e_n=\lambda_n e_n$, справедливо включение $\{\lambda_n\}\subset\sigma_p(M_\lambda)$. С другой стороны, если $\mu\in\mathbb{C}$ и $\mu\neq\lambda_n$ ни для какого n, то $M_\lambda-\mu\mathbf{1}=M_{\lambda-\mu 1}$ — это оператор умножения на последовательность $\lambda-\mu 1=(\lambda_n-\mu)$ ненулевых чисел. Поэтому, очевидно, $\operatorname{Ker}(M_\lambda-\mu\mathbf{1})=0$, и $\mu\notin\sigma_p(T)$. Наконец, пусть $\mu\in\sigma(M_\lambda)=\overline{\{\lambda_n\}}$, но $\mu\neq\lambda_n$ ни для какого n. Тогда вектор $e_n=(\lambda_n-\mu)^{-1}(M_\lambda-\mu\mathbf{1})e_n$ лежит в $\operatorname{Im}(M_\lambda-\mu\mathbf{1})$ для всех n. Но линейная оболочка e_n-ых плотна в E; значит, и $\operatorname{Im}(M_\lambda-\mu\mathbf{1})$ плотен в E, т.е. $\mu\in\sigma_c(M_\lambda)$. ☐

Упражнение 3.4. Найдите $\sigma_p(M_\lambda)$, $\sigma_c(M_\lambda)$ и $\sigma_r(M_\lambda)$ в случае, когда $E=\ell^\infty$.

Упражнение 3.5. Пусть $E=L^p(X,\mu)$ (где $1\leqslant p<\infty$), и пусть $M_f\in\mathscr{B}(E)$ — оператор умножения на существенно ограниченную измеримую функцию $f\colon X\to\mathbb{C}$ (см. пример 3.2). Тогда $\sigma_p(M_f)=$ $=\{\lambda\in\mathbb{C}:\mu(f^{-1}(\lambda))>0\}$, $\sigma_c(M_f)=\sigma(M_f)\setminus\sigma_p(M_f)$, и $\sigma_r(M_f)=\varnothing$.

Замечание 3.1. Важный частный случай предыдущего упражнения — оператор умножения на «независимую переменную» M_t, действующий в $L^2[0,1]$ по правилу $(M_t g)(x)=xg(x)$. У него $\sigma(M_t)=\sigma_c(M_t)=$ $=[0,1]$, а точечный и остаточный спектр пусты.

Кстати, полезно представлять себе, как устроено множество существенных значений непрерывной функции:

Упражнение 3.6. 1) Если f — непрерывная функция на отрезке, то множество существенных значений f — это в точности множество ее значений.

2) Пусть $f\in L^\infty(X,\mu)$; верно ли, что каждое значение f является ее существенным значением?

3) Обратно, верно ли, что каждое существенное значение $f\in$ $\in L^\infty(X,\mu)$ является ее значением?

Упражнение 3.7. Найдите $\sigma_p(M_f)$, $\sigma_c(M_f)$ и $\sigma_r(M_f)$ в случае, когда $E=L^\infty(X,\mu)$.

3.2. Двойственность. Операторы сдвига

Чтобы находить спектры ограниченных операторов, часто бывает удобно использовать соображения двойственности.

Напоминание 3.1. Пусть E, F — банаховы пространства, $T \in \mathscr{B}(E, F)$ — ограниченный оператор. Отображение $T^* \colon F^* \to E^*$, действующее по правилу $T^* f = f \circ T$, называется *сопряженным оператором* к T. Этот оператор также линеен, ограничен, и $\|T^*\| = \|T\|$.

Если Вы не встречались раньше со следующим фактом, обязательно сделайте его в качестве упражнения.

Упражнение 3.8. Оператор $T \in \mathscr{B}(E, F)$ — топологический изоморфизм $\iff$ T^* — топологический изоморфизм.

Замечание 3.2. Разумеется, импликация $\Longrightarrow$ в предыдущем упражнении тривиальна (почему?) и верна также для неполных нормированных пространств. А вот обратная импликация существенно использует полноту E и F (постройте соответствующий контрпример).

Поскольку $(T - \lambda \mathbf{1}_E)^* = T^* - \lambda \mathbf{1}_{E^*}$ для любого $T \in \mathscr{B}(E)$, справедливо

Следствие 3.1. *Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$; тогда $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.*

Итак, спектры у T и T^* совпадают. А что можно сказать про части спектра — непрерывный, точечный и остаточный? Для этого нам понадобится следующий несложный факт.

Упражнение 3.9. Пусть $T \in \mathscr{B}(E, F)$ — ограниченный оператор между банаховыми пространствами. Тогда

1) $\overline{\operatorname{Im} T} = F \iff \operatorname{Ker} T^* = 0$;

2) $\overline{\operatorname{Im} T^*} = E^* \Longrightarrow \operatorname{Ker} T = 0$;

3) Обратная импликация верна, если E рефлексивно, а в общем случае — нет.

Применяя результат этого упражнения к оператору $T - \lambda \mathbf{1}$ (где $T \in \mathscr{B}(E)$), получаем следующие соотношения:

Предложение 3.3. *Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$. Тогда*

1) $\sigma_p(T) \subset \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$;

2) $\sigma_c(T) \subset \sigma_c(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$;

3) $\sigma_r(T) \subset \sigma_p(T^*)$;

4) $\sigma_p(T^*) \subset \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$;

5) $\sigma_c(T^*) \subset \sigma_c(T)$;

6) $\sigma_r(T^*) \subset \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$.

Если же E рефлексивно, то

7) $\sigma_c(T) = \sigma_c(T^*)$;
8) $\sigma_r(T^*) \subset \sigma_p(T)$.

Посмотрим на несколько классических примеров.

Пример 3.3 (левый и правый сдвиги). Пусть $E = \ell^p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$), либо $E = c_0$. Оператор *правого сдвига* $T_r \in \mathscr{B}(E)$ действует по правилу $T_r(x) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in E$. Очевидно, он изометричен, поэтому $\|T_r\| = 1$. Оператор *левого сдвига* $T_\ell \in \mathscr{B}(E)$ задается формулой $T_r(x) = (x_2, x_3, \ldots)$. Он, конечно, не изометричен (поскольку имеет ненулевое ядро), но все же $\|T_\ell\| = 1$ (почему?).

Напоминание 3.2. Пусть $1 \leqslant p < \infty$, и q таково, что $1/p + 1/q = 1$ (если $p = 1$, то $q = \infty$). Тогда оператор

$$\ell^q \to (\ell^p)^*, \quad y \mapsto f_y, \quad f_y(x) = \sum_i x_i y_i$$

является изометрическим изоморфизмом. Аналогичным образом определяется изометрический изоморфизм $\ell^1 \to (c_0)^*$.

С другой стороны, важно помнить следующее:

Упражнение 3.10. Пространства $(\ell^\infty)^*$ и ℓ^1 не являются топологически изоморфными.

Упражнение 3.11. Пространства ℓ^p рефлексивны при $1 < p < \infty$, а пространства c_0, ℓ^1 и ℓ^∞ — нет.

Если отождествить $(\ell^p)^*$ и ℓ^q при помощи описанного выше изоморфизма, то оператор, сопряженный к левому сдвигу, «превратится» в правый сдвиг, и наоборот. Чтобы сказать это более строго, надо договориться о том, какие операторы считать «одинаковыми». Тут есть два подхода: все зависит от того, какие банаховы пространства мы считаем «одинаковыми» — топологически изоморфные или же изометрически изоморфные[1].

Определение 3.2. Пусть $S \in \mathscr{B}(E)$ и $T \in \mathscr{B}(F)$ — ограниченные операторы в банаховых пространствах. Они называются *подобными* (соответственно, *изометрически эквивалентными*), если существует

[1] Для ценителей общематематических концепций: все зависит от того, в какой *категории* банаховых пространств мы работаем.

топологический изоморфизм (соответственно, изометрический изоморфизм) $U\colon E \to F$, такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "S"] \arrow[d, "U"'] & E \arrow[d, "U"] \\ F \arrow[r, "T"] & F \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Упражнение 3.12. Если $S \in \mathscr{B}(E)$ и $T \in \mathscr{B}(F)$ подобны, то $\sigma(S) = \sigma(T)$, и то же самое верно для σ_p, σ_c, σ_r.

Упражнение 3.13. Пусть $1 \leqslant p < \infty$, и $1/p + 1/q = 1$. Пусть T_r — правый сдвиг в ℓ^p (соответственно, в c_0), а T_ℓ — левый сдвиг в ℓ^q (соответственно, в ℓ^1). Тогда $(T_r)^*$ и T_ℓ изометрически эквивалентны. То же самое верно, если поменять символы “r” и “ℓ” местами.

Предложение 3.4. *Пусть $1 < p < \infty$, и $T_r, T_\ell \in \mathscr{B}(\ell^p)$ — операторы правого и левого сдвига. Тогда:*
1) $\sigma(T_r) = \sigma(T_\ell) = \overline{\mathbb{D}}$;
2) $\sigma_p(T_r) = \varnothing, \quad \sigma_c(T_r) = \mathbb{T}, \quad \sigma_r(T_r) = \mathbb{D}$;
3) $\sigma_p(T_\ell) = \mathbb{D}, \quad \sigma_c(T_\ell) = \mathbb{T}, \quad \sigma_r(T_\ell) = \varnothing$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что спектры наших операторов лежат в $\overline{\mathbb{D}}$, поскольку их нормы равны 1. Найдем вначале их точечные спектры. Заметим, что

$$T_r x = \lambda x \iff (0 = \lambda x_1) \& (x_n = \lambda x_{n+1}\ \forall n) \iff x = 0,$$

поэтому $\sigma_p(T_r) = \varnothing$. С другой стороны,

$$T_\ell x = \lambda x \iff x_{n+1} = \lambda x_n\ \forall n \iff x_n = x_1 \lambda^{n-1}\ \forall n,$$

поэтому вектор $x \neq 0$ является собственным для T_ℓ с собственным значением λ тогда и только тогда, когда последовательность (λ^{n-1}) лежит в ℓ^p, т.е. когда $|\lambda| < 1$. Следовательно, $\sigma_p(T_\ell) = \mathbb{D}$.

Обозначим временно наши операторы через $T_r^{(p)}$ и $T_\ell^{(p)}$ соответственно. Пусть $1/p + 1/q = 1$; тогда из предложения 3.3 следует, что

$$\mathbb{D} = \sigma_p(T_\ell^{(q)}) \subset \sigma_p(T_r^{(p)}) \cup \sigma_r(T_r^{(p)}) = \sigma_r(T_r^{(p)}) \subset \sigma_p(T_\ell^{(q)}) = \mathbb{D}.$$

Значит, $\sigma_r(T_r) = \mathbb{D}$. С учетом замкнутости спектра, отсюда сразу следует, что $\sigma(T_r) = \overline{\mathbb{D}}$ и что $\sigma_c(T_r) = \mathbb{T}$. Ясно, что это верно как в ℓ^p, так и в ℓ^q; поэтому из следствия 3.1 и предложения 3.3 мы заключаем, что $\sigma(T_\ell) = \overline{\mathbb{D}}$ и $\sigma_c(T_\ell) = \mathbb{T}$. Оставшееся равенство $\sigma_r(T_\ell) = \varnothing$ теперь очевидно. □

Замечание 3.3. Полезное упражнение — доказать это предложение «в лоб», т.е. не используя соображений двойственности. Задача вполне решаемая, но, согласитесь, с двойственностью все выглядит куда проще и красивее.

Упражнение 3.14. Найти спектры и его части (т.е. непрерывный, точечный, остаточный спектры) операторов левого и правого сдвига, действующих в c_0, ℓ^1 и ℓ^∞.

Пример 3.4 (сдвиги на группах). Операторы, о которых пойдет речь ниже, строятся по следующей общей схеме. Пусть G — группа, E — некоторое пространство функций на G, $g \in G$ — фиксированный элемент. *Оператор сдвига* $T_g \colon E \to E$ задается формулой $(T_g f)(h) = f(g^{-1}h)$ для $f \in E$, $h \in G$. Разумеется, чтобы оператор был корректно определен, нужно, чтобы пространство E было «инвариантно относительно сдвигов». Нас будут интересовать следующие случаи:

1. $G = \mathbb{Z}$, $E = \ell^p(\mathbb{Z})$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или же $E = c_0(\mathbb{Z})$. Оператор *двустороннего сдвига*[1] $T_b \in \mathscr{B}(E)$ определяется формулой $(T_b x)_n = x_{n-1}$ для $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in E$. Очевидно, он изометричен и обратим.

2. $G = \mathbb{T}$ — группа комплексных чисел, равных по модулю 1, относительно операции умножения. Введем на $\mathbb{T}$ меру «длина дуги, деленная на 2π», и положим $E = L^p(\mathbb{T})$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или же $E = C(\mathbb{T})$. Для каждого $\zeta \in \mathbb{T}$ определим оператор $T_\zeta \in \mathscr{B}(E)$ формулой $(T_\zeta f)(z) = f(\zeta^{-1}z)$ для $f \in E$, $z \in \mathbb{T}$. Очевидно, он изометричен (ввиду инвариантности нашей меры относительно «поворотов») и обратим; обратным оператором является $T_{\zeta^{-1}}$.

2. $G = \mathbb{R}$, $E = L^p(\mathbb{R})$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или же $E = C_0(\mathbb{R})$ (пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}$, стремящихся к нулю на бесконечности, снабженное sup-нормой). Для каждого $s \in \mathbb{R}$ определим оператор $T_s \in \mathscr{B}(E)$ формулой $(T_s f)(t) = f(t-s)$ для $f \in E$, $s \in \mathbb{R}$. Очевидно, он также изометричен (ввиду инвариантности меры Лебега относительно сдвигов) и обратим; обратным оператором является T_{-s}.

Поскольку все три оператора изометричны и обратимы, их спектры содержатся в единичной окружности $\mathbb{T}$ (см. упражнение 2.21).

Чтобы найти спектры и части спектра операторов сдвига, обсудим один общий метод, который устанавливает взаимосвязь между операторами сдвига и умножения на функцию (см. примеры 3.1 и 3.2). Этот

[1] Не очень удачное название: на самом деле, сдвигает этот оператор вправо, только последовательности $(x_n) \in E$ теперь, в отличие от предыдущего примера, «двусторонние».

метод лежит в основе целой науки — *абстрактного гармонического анализа.*

Предложение 3.5. *1) Оператор двустороннего сдвига $T_b \in \ell^2(\mathbb{Z})$ и оператор умножения $M_z \in \mathscr{B}(L^2(\mathbb{T}))$, $(M_z f)(z) = zf(z)$ изометрически эквивалентны.*

2) Оператор сдвига на окружности $T_\zeta \in L^2(\mathbb{T})$ и диагональный оператор $M_{(\zeta^{-n})} \in \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$, $M_{(\zeta^{-n})}(x) = (\zeta^{-n} x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ изометрически эквивалентны.

Доказательство. В обоих случаях нужную изометрическую эквивалентность осуществляет оператор $U\colon L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, сопоставляющий каждой $f \in L^2(\mathbb{T})$ последовательность ее коэффициентов Фурье относительно тригонометрической системы: $(Uf)_n = \langle f, z^n\rangle = \int_{\mathbb{T}} f(z) z^{-n}\, dz$. $\square$

Поскольку спектры операторов умножения нам уже известны (см. упр. 3.5), для нахождения спектров операторов сдвига остается воспользоваться результатом упражнения 3.12.

Следствие 3.2. *Пусть $T_b \in \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ — оператор двустороннего сдвига. Тогда $\sigma(T_b) = \sigma_c(T_b) = \mathbb{T}$.*

Следствие 3.3. *Пусть $T_\zeta \in \mathscr{B}(L^2(\mathbb{T}))$ — оператор сдвига на окружности. Тогда $\sigma_p(T_\zeta) = \{\zeta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\sigma_r(T_\zeta) = \varnothing$. Кроме того,*

1) если ζ — корень из единицы, то $\sigma(T_\zeta) = \{\zeta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$;

2) если ζ не является корнем из единицы, то $\sigma(T_\zeta) = \mathbb{T}$.

Доказательство. Если ζ — корень из единицы, то множество $\{\zeta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ конечно и потому замкнуто. Если же ζ не является корнем из единицы, то это множество всюду плотно на окружности. Остальное следует из предложений 3.1 и 3.2. $\square$

Упражнение 3.15. 1) Оператор сдвига $T_s \in \mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}))$ и оператор умножения $M_{e^{-ist}} \in \mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}))$, $(M_{e^{-ist}} f)(t) = e^{-ist} f(t)$ изометрически эквивалентны.

2) $\sigma(T_s) = \sigma_c(T_s) = \mathbb{T}$.

Указание: воспользоваться преобразованием Фурье.

Упражнение 3.16. Найти спектр и его части (непрерывный, точечный, остаточный) для операторов сдвига из примера 3.4, действующих в соответствующих ℓ^p- или L^p-пространствах при $p \neq 2$, а также в $c_0(\mathbb{Z})$ или (смотря по смыслу) $C_0(\mathbb{R})$, $C(\mathbb{T})$.

Предложение 3.5 и упражнение 3.15 показывают, что у операторов сдвига в пространствах $\ell^2(\mathbb{Z})$, $L^2(\mathbb{T})$ и $L^2(\mathbb{R})$ есть *функциональные модели* — операторы умножения на функцию или последовательность. Наличие у оператора функциональной модели — свойство весьма удобное, позволяющее глубже понять природу этого оператора, узнать, какие у него есть инвариантные подпространства и т.п. Мы еще вернемся к функциональным моделям, когда доберемся до спектральной теоремы. А сейчас давайте убедимся, что функциональная модель есть и у оператора правого сдвига в ℓ^2.

Определение 3.3. *Пространство Харди* — это замкнутое подпространство в $L^2(\mathbb{T})$, определяемое следующим образом:

$$H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \langle f, z^n \rangle = 0 \quad \forall n < 0\}.$$

Иными словами, H^2 состоит в точности из тех $f \in L^2(\mathbb{T})$, у которых коэффициенты Фурье с отрицательными номерами равны нулю.

То же самое пространство можно определить как некое пространство аналитических функций:

Упражнение 3.17. Для каждой непрерывной функции f на открытом единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ и каждого $0 < \rho < 1$ положим

$$\|f\|_\rho = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Докажите, что определение H^2, данное выше, эквивалентно следующему:

$$H^2 = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \text{ голоморфна и } \|f\| = \lim_{\rho \to 1} \|f\|_\rho < \infty\}.$$

Указание. Установите взаимосвязь между тригонометрическими рядами Фурье и рядами Тэйлора.

Упражнение 3.18. Докажите, что оператор правого сдвига в ℓ^2 изометрически эквивалентен оператору умножения M_z (см. предложение 3.5 (1)) в H^2.

Что же касается оператора левого сдвига, то он, несмотря на кажущуюся схожесть с оператором правого сдвига, никакой разумной функциональной моделью не обладает. Но это уже гораздо более сложный факт, выходящий за рамки нашего курса.

Спектры операторов из примеров 3.3 и 3.4 (за исключением сдвига на окружности), а также части их спектров, обладают одним любопытным свойством: они «круглые». Это означает, что если какая-то точка попала в спектр или в одну из его частей, то туда же попадает и вся окружность с центром в нуле, проходящая через эту точку. Чтобы понять, почему так происходит, введем еще одно общее понятие.

Определение 3.4. Пусть $S \in \mathscr{B}(E)$ и $T \in \mathscr{B}(F)$ — ограниченные операторы в банаховых пространствах. Они называются *слабо подобными* (соответственно, *слабо изометрически эквивалентными*), если существуют топологические изоморфизмы (соответственно, изометрические изоморфизмы) $U_1, U_2 \colon E \to F$, такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "S"] \arrow[d, "U_1"'] & E \arrow[d, "U_2"] \\ F \arrow[r, "T"] & F \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Разумеется, если операторы подобны, то они слабо подобны, и аналогичное утверждение справедливо для изометрической эквивалентности. Обратное, конечно, неверно: посмотрите на тождественный оператор $\mathbf{1}_E$. Тот же пример показывает, что спектры слабо подобных операторов вовсе не обязаны совпадать. Тем не менее, легко проверить (проверьте!), что свойства «быть обратимым», «быть инъективным», «иметь плотный образ» и т.п. не меняются при замене оператора на слабо подобный.

Упражнение 3.19. Пусть T — любой из операторов из примера 1 или 2, кроме сдвига на окружности, и пусть $\lambda \in \mathbb{T}$. Тогда операторы $T - \mathbf{1}$ и $T - \lambda\mathbf{1}$ слабо подобны. Как следствие, $\lambda \in \sigma(T) \iff 1 \in \sigma(T)$, и то же самое верно для σ_p, σ_c и σ_r.

3.3. Еще несколько частей спектра

Определение 3.5. Оператор $T \in \mathscr{B}(E, F)$ между банаховыми пространствами называется *топологически инъективным*, если $T \colon E \to \operatorname{Im} T$ — гомеоморфизм.

Упражнение 3.20. 1) T топологически инъективен $\iff$ он *ограничен снизу*, т.е. существует $c > 0$, такое, что $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$ для всех $x \in E$.

2) T топологически инъективен $\iff$ T инъективен и $\operatorname{Im} T$ замкнут.

3) Верны ли предыдущие утверждения для операторов в нормированных пространствах?

Определение 3.6. *Аппроксимативным точечным спектром* оператора $T \in \mathscr{B}(E)$ называется множество

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda\mathbf{1} \text{ не является топологически инъективным }\}.$$

Спектром сюръективности T называется множество

$$\sigma_{su}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(T - \lambda\mathbf{1}) \neq E\}.$$

Спектром сжатия T называется множество

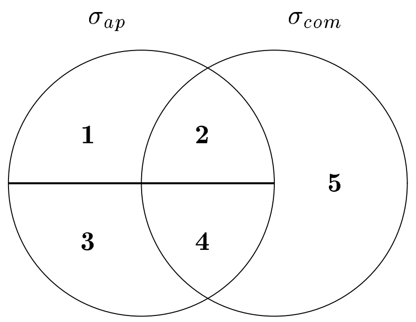
$$\sigma_{com}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\mathrm{Im}(T - \lambda\mathbf{1})} \neq E\}.$$

Отметим несколько очевидных свойств этих частей спектра.

Предложение 3.6. *Справедливы соотношения*
1) $\sigma_p(T) \cup \sigma_{su}(T) = \sigma(T)$,
2) $\sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{com}(T) = \sigma(T)$,
3) $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T)$,
4) $\sigma_{com}(T) \subset \sigma_{su}(T)$.

Доказательство. В комментарии нуждается лишь второе из перечисленных соотношений. Оно следует из того факта, что топологически инъективный оператор имеет замкнутый образ, поэтому топологически инъективный оператор с плотным образом обратим. □

Итак, у нас набралось уже шесть частей спектра. Чтобы понять, как все они связаны друг с другом, удобно нарисовать[1] следующую картинку:



$$\begin{aligned}
\sigma_p(T) &= \mathbf{1} \cup \mathbf{2}\\
\sigma_{ap}(T) &= \mathbf{1} \cup \mathbf{2} \cup \mathbf{3} \cup \mathbf{4}\\
\sigma_{com}(T) &= \mathbf{2} \cup \mathbf{4} \cup \mathbf{5}\\
\sigma_r(T) &= \mathbf{4} \cup \mathbf{5}\\
\sigma_c(T) &= \mathbf{3}\\
\sigma_{su}(T) &\supset \mathbf{2} \cup \mathbf{3} \cup \mathbf{4} \cup \mathbf{5}
\end{aligned}$$

Левый круг в этой картинке — это $\sigma_{ap}(T)$, его верхняя половина — $\sigma_p(T)$, а правый круг — $\sigma_{com}(T)$. Остальные соотношения, указанные в правой части рисунка, вытекают непосредственно из определений.

[1] По совету П. Халмоша [28].

Посмотрим теперь, как σ_{ap}, σ_{com} и σ_{su} реагируют на переход к сопряженному оператору (ср. предложение 3.3). Для этого нам понадобится следующий факт.

Упражнение 3.21. Пусть E, F — банаховы пространства, $T \in \mathscr{B}(E, F)$ — ограниченный оператор. Тогда

1) T топологически инъективен $\iff$ T^* сюръективен;

2) T сюръективен $\Longrightarrow$ T^* топологически инъективен.

3)* Верно и обратное утверждение.

Применяя результат последнего упражнения к оператору $T - \lambda\mathbf{1}$ (где $T \in \mathscr{B}(E)$), получаем следующие соотношения:

Предложение 3.7. *Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$. Тогда*

1) $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{su}(T^*)$;
2) $\sigma_{su}(T) = \sigma_{ap}(T^*)$;
3) $\sigma_{com}(T) = \sigma_p(T^*)$;
4) $\sigma_p(T) \subset \sigma_{com}(T^*)$.

Если же E рефлексивно, то

7) $\sigma_p(T) = \sigma_{com}(T^*)$.

Упражнение 3.22. Найдите σ_{ap}, σ_{com} и σ_{su} для диагонального оператора, операторов умножения и сдвига.

Мы уже знаем, что точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр оператора могут быть незамкнутыми, а могут быть и пустыми (см., в частности, предложения 3.2 и 3.4) — в отличие от всего спектра, который всегда компактен и непуст. А вот с аппроксимативным точечным спектром, а также со спектром сюръективности таких неприятностей не бывает:

Предложение 3.8. *Аппроксимативный точечный спектр $\sigma_{ap}(T)$ оператора $T \in \mathscr{B}(E)$ замкнут и содержит границу спектра $\partial\sigma(T)$. То же самое верно и для спектра сюръективности $\sigma_{su}(T)$. Как следствие, $\sigma_{ap}(T)$ и $\sigma_{su}(T)$ — непустые компактные подмножества в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. (Набросок). Вначале сделайте следующие упражнения:

Упражнение 3.23. 1) Множество всех топологически инъективных операторов открыто в $\mathscr{B}(E)$.

2) $\sigma_{ap}(T)$ замкнут.

Упражнение 3.24. Пусть A — унитальная банахова алгебра.

1) Если $a \in A$ обратим, и $\|b\| < \dfrac{1}{\|a^{-1}\|}$, то $a - b$ обратим.

2) Если $a \in A$ и $\lambda \notin \sigma(a)$, то $\|(a - \lambda 1)^{-1}\| \geqslant \dfrac{1}{\rho(\lambda, \sigma(a))}$, где $\rho(\lambda, \sigma(a))$ — расстояние от λ до $\sigma(a)$.

С учетом равенств $\sigma(T) = \sigma(T^*)$ и $\sigma_{su}(T) = \sigma_{ap}(T^*)$, нам осталось установить, что $\partial\sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T)$. Возьмем $\lambda \in \partial\sigma(T)$ и выберем последовательность $\{\lambda_n\}$ так, чтобы $\lambda_n \to \lambda$ и $\lambda_n \notin \sigma(T)$ при всех n. Из п.2) упражнения 3.24 следует, что $\|(T - \lambda_n)^{-1}\| \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому существует последовательность $\{x_n\} \subset E$, такая, что $\|x_n\| = 1$ и $\|(T - \lambda_n)^{-1} x_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$. Положим

$$y_n = \frac{(T - \lambda_n)^{-1} x_n}{\|(T - \lambda_n)^{-1} x_n\|};$$

тогда $\|y_n\| = 1$ и $(T - \lambda_n) y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда получаем, что

$$(T - \lambda) y_n = (T - \lambda_n) y_n - (\lambda - \lambda_n) y_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Следовательно, $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, как и требовалось. □

Упражнение 3.25. Докажите часть последнего предложения, касающуюся $\sigma_{su}(T)$, не используя при этом результат п.3) упражнения 3.21. *Указание.* Вначале докажите, что множество всех сюръективных операторов открыто в $\mathscr{B}(E)$, и что $\sigma_{ap}(T^*) \subset \sigma_{su}(T)$.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$ — ограниченный оператор, и $F \subset E$ — замкнутое подпространство, инвариантное относительно T (т.е. такое, что $T(F) \subset F$). Тогда ограничение $T|_F$ — оператор в F. Что больше — $\sigma(T|_F)$ или $\sigma(T)$? Несложные примеры (приведите их!) показывают, что в одних случаях $\sigma(T|_F) \subset \sigma(T)$, а в других — наоборот. Напомним, однако, о *полном спектре* $\sigma_f(T)$ (см. определение 2.17), который получается из $\sigma(T)$ «заклеиванием дыр». Оказывается, справедливо

Предложение 3.9. *Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$ — ограниченный оператор, и $F \subset E$ — замкнутое подпространство, инвариантное относительно T. Тогда $\sigma(T|_F) \subset \sigma_f(T)$.*

Доказательство. (Набросок). Положим $U = \mathbb{C} \setminus \sigma_f(T)$; из определения $\sigma_f(T)$ следует, что это область (открытое связное множество) в $\mathbb{C}$. Если $\lambda \in U$ и $|\lambda| > \|T\|$, то

$$(T - \lambda \mathbf{1})^{-1} = -\lambda^{-1}(\mathbf{1} - \lambda^{-1} T)^{-1} = -\sum_n \lambda^{-(n+1)} T^n$$

(см. теорему 2.1). Отсюда следует, что $(T-\lambda\mathbf{1})^{-1}x \in F$ для всех указанных λ и для любого $x \in F$.

Лемма 3.1 («векторнозначная теорема единственности»). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — область, E — банахово пространство, $F \subset E$ — замкнутое подпространство, $f: U \to E$ — голоморфная функция. Предположим, что $f(M) \subset F$ для некоторого подмножества $M \subset U$, имеющего предельную точку в U. Тогда $f(U) \subset F$.*

Упражнение 3.26. Докажите эту лемму.

Чтобы завершить доказательство предложения, остается применить лемму к функции $f(x) = (T-\lambda\mathbf{1})^{-1}x$ (где $x \in F$ — фиксированный вектор). Действительно, тогда $(T-\lambda\mathbf{1})^{-1}x \in F$ уже для всех $\lambda \in U$, поэтому оператор $T|_F - \lambda\mathbf{1}_F$ обратим в $\mathscr{B}(F)$ для всех $\lambda \in U$, т.е. для всех $\lambda \notin \sigma_f(T)$. □

Пример 3.5. Используя предложение 3.9, можно получить еще одно (уже третье) доказательство того, что спектр оператора двустороннего сдвига $T_b \in \mathscr{B}(E)$ (где $E \in \{\ell^p, c_0\}$) совпадает с единичной окружностью $\mathbb{T}$. В самом деле, положим

$$F = \{x \in E : x_n = 0 \;\forall n \leqslant 0\};$$

тогда $T|_F$ подобен оператору T_r правого сдвига, у которого $\sigma(T_r) = \overline{\mathbb{D}}$ (см. предложение 3.4). Поэтому из предложения 3.9 следует, что $\mathbb{D}$ — это компонента связности множества $\mathbb{C} \setminus \sigma(T_b)$. С другой стороны, T_b — изометрический изоморфизм E на себя, поэтому $\sigma(T_b) \subset \mathbb{T}$ (см. упр. 2.21). Сопоставляя последние два утверждения, получаем равенство $\sigma(T_b) = \mathbb{T}$.

Литературные указания

Конкретные примеры операторов, встречающиеся в этой главе, а также материал о точечном, непрерывном и остаточном спектрах содержатся в [30]; см. также учебник У. Рудина [26], в котором очень подробно изложена теория двойственности в банаховых пространствах. О пространстве Харди можно прочесть в [5, 8]. Аппроксимативный точечный спектр, спектр сжатия и спектр сюръективности обсуждаются в недавней монографии К. Лаурсена и М. Нойманна [43]; там же рассматриваются спектры ограничений операторов на инвариантные подпространства. По поводу частей спектра см. также книгу П. Халмоша [28].

4. ГОЛОМОРФНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Мы уже знаем, что от любого элемента любой унитальной алгебры можно «брать рациональные функции», определенные на спектре этого элемента (см. §2.4). В общем случае, т.е. для произвольной алгебры, никакого более содержательного функционального исчисления построить нельзя. Однако, если A — банахова алгебра, то положение дел меняется: от любого ее элемента можно «брать» не только рациональные, но и голоморфные функции.

Чтобы придать строгий смысл выражению »голоморфная функция от элемента банаховой алгебры», нам придется ненадолго отвлечься от классической «банаховой» науки и поговорить о более общих вещах.

4.1. Полинормированные пространства

Многие векторные пространства, встречающиеся в различных областях математики, обладают естественной топологией, которая не задается никакой нормой. Таковы, в частности, многие пространства гладких и голоморфных функций, а также пространства обобщенных функций (т.е. непрерывных функционалов на пространствах гладких функций), играющие важную роль в теории уравнений с частными производными. В теории операторов тоже не удается обойтись одними лишь банаховыми пространствами. Поэтому наша ближайшая цель — познакомиться с некоторыми ненормируемыми пространствами, которые нам вскоре понадобятся.

Определение 4.1. Функция $\|\cdot\|\colon E \to [0,+\infty)$ на векторном пространстве E называется *полунормой* (или *преднормой*), если она обладает следующими свойствами:

1) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in E$;

2) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in E$.

Таким образом, полунорма — это «почти норма», только ей разрешается обращаться в нуль на ненулевых векторах.

Определение 4.2. Векторное пространство E, снабженное семейством полунорм $\{\|\cdot\|_i : i \in I\}$ (где I — произвольное множество), называется *полинормированным пространством*.

Если E — полинормированное пространство, то на нем можно ввести топологию примерно тем же способом, что и на нормированном пространстве. А именно, для каждых $x \in E$, $\varepsilon > 0$ и $i \in I$ рассмотрим «шар»

$$U_i(x, \varepsilon) = \{y \in E : \|x - y\|_i < \varepsilon\}. \tag{4.1}$$

Определение 4.3. Самая слабая топология на E, в которой открыты все множества вида (4.1), называется *топологией, порожденной семейством полунорм* $\{\|\cdot\|_i : i \in I\}$.

Замечание 4.1. Если X — произвольное множество, а P — произвольное семейство его подмножеств, то на X существует слабейшая топология, в которой открыты все множества из P. Базой этой топологии являются всевозможные конечные пересечения множеств из P, а само P при этом называется *предбазой* этой топологии.

Упражнение 4.1. Топология на E, порожденная семейством полунорм $\{\|\cdot\|_i : i \in I\}$, может быть определена любым из следующих эквивалентных способов:

1) Это — самая слабая топология, инвариантная относительно сдвигов, в которой все полунормы $\|\cdot\|_i$ непрерывны.

2) Базу этой топологии образуют всевозможные множества вида

$$U_{i_1,\ldots,i_n}(x, \varepsilon) = \{y \in E : \|x - y\|_{i_k} < \varepsilon \;\forall k = 1, \ldots, n\} \tag{4.2}$$

(где $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$).

Топология, порожденная семейством полунорм, согласована с алгебраической структурой:

Упражнение 4.2. В полинормированном пространстве E операции сложения $E \times E \to E$ и умножения на скаляр $\mathbb{C} \times E \to E$ непрерывны.

Замечание 4.2. Векторное пространство, снабженное топологией, в которой операции сложения и умножения на скаляр непрерывны, называется *топологическим векторным пространством.* Естественно спросить, все ли топологические векторные пространства получаются описанным способом, и если не все, то какие именно. Ответ на этот вопрос таков: топология на топологическом векторном пространстве E порождается некоторым семейством полунорм тогда и только тогда, когда оно *локально выпукло.* Это означает, по определению, что в E существует база окрестностей нуля, состоящая из выпуклых множеств. Проверьте в качестве несложного упражнения, что все множества вида (4.2) действительно выпуклы.

Важное свойство локально выпуклых пространств, выделяющее их из класса всех топологических векторных пространств, состоит в том, что на них (при условии хаусдорфовости; см. ниже упр. 4.4), благодаря теореме Хана–Банаха, имеется достаточно много непрерывных линейных функционалов. Поэтому при изучении локально выпуклых пространств можно использовать соображения двойственности, что часто бывает весьма удобно. С другой стороны, на произвольном топологическом векторном пространстве вообще может не существовать ненулевых непрерывных линейных функционалов, даже если оно хаусдорфово.

Всюду далее $(E, \{\|\cdot\|_i : i \in I\})$ — полинормированное пространство, снабженное топологией по указанному выше рецепту.

Упражнение 4.3. Последовательность $\{x_n\} \subset E$ сходится к $x \in E$ $\iff$ $\|x - x_n\|_i \to 0$ для всех $i \in I$.

Упражнение 4.4. E хаусдорфово $\iff$ для каждого ненулевого $x \in E$ найдется $i \in I$ такое, что $\|x\|_i > 0$.

Примеры полинормированных пространств будут у нас появляться по мере необходимости. Вот пример, который нам понадобится в первую очередь:

Пример 4.1. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $\mathscr{O}(U)$ — пространство голоморфных функций на U. Для каждого компакта $K \subset U$ введем полунорму $\|\cdot\|_K$ на $\mathscr{O}(U)$, полагая $\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|$. Топология, порожденная этим семейством полунорм, называется *компактно-открытой*. Из упражнения 4.3 видно, что последовательность f_n сходится к f в этой топологии тогда и только тогда, когда она сходится к f равномерно на каждом компакте в U. Поэтому классическую теорему Рунге об аппроксимации голоморфных функций рациональными можно переформулировать так:

Теорема (Рунге). *Для любого открытого множества $U \subset \mathbb{C}$ алгебра $R(U)$ плотна в $\mathscr{O}(U)$.*

Отображения между полинормированными пространствами, уважающие имеющиеся на этих пространствах алгебраическую и топологическую структуры — это, конечно, непрерывные линейные отображения (операторы). Как и в случае операторов между нормированными пространствами, свойство непрерывности можно переформулировать «на языке неравенств»:

Упражнение 4.5. Пусть $(E, \{\|\cdot\|_i : i \in I\})$ и $(F, \{\|\cdot\|_j : j \in J\})$ — полинормированные пространства, $T\colon E \to F$ — линейный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T непрерывен.

2) Для каждого $j \in J$ найдутся $C > 0$ и конечный набор $i_1, \ldots, i_n \in I$ такие, что $\|Tx\|_j \leqslant C \max\{\|x\|_{i_1}, \ldots, \|x\|_{i_n}\}$ для всех $x \in E$.

Часто бывает так, что одну и ту же топологию на векторном пространстве можно задать несколькими разными семействами полунорм.

Определение 4.4. Семейства полунорм $\{\|\cdot\|_i : i \in I\}$ и $\{\|\cdot\|_j : j \in J\}$ на векторном пространстве E называются *эквивалентными*, если они порождают одну и ту же топологию.

Упражнение 4.6. Сформулируйте и докажите критерий эквивалентности двух семейств полунорм «на языке неравенств».

Пример 4.2. Пусть $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ — круг радиуса R. (При $R = \infty$ мы полагаем $\mathbb{D}_R = \mathbb{C}$). Каждая $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ разлагается в $\mathbb{D}_R$ в ряд Тэйлора: $f(z) = \sum_n c_n z^n$. (Обратите внимание, что он сходится в компактно-открытой топологии на $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$, описанной в примере 4.1.) Для каждого $0 < r < R$ положим $\|f\|_r = \sum_n |c_n| r^n$; очевидно, $\|\cdot\|_r$ — полунорма на $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$.

Упражнение 4.7. Пусть $\{r_n\}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к R. Докажите, что семейства полунорм

$$\{\|\cdot\|_K : K \subset \mathbb{D}_R \text{ — компакт }\}, \quad \{\|\cdot\|_r : 0 < r < R\} \quad \text{и} \quad \{\|\cdot\|_{r_n} : n \in \mathbb{N}\}$$

на $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ эквивалентны.

Из последнего упражнения видно, что компактно-открытая топология на $\mathscr{O}(U)$, где $U = \mathbb{D}_R$, может быть задана счетным набором полунорм (кстати, докажите, что это так для любого открытого множества U). А нельзя ли обойтись конечным набором?

Упражнение 4.8. Хаусдорфово полинормированное пространство $(E, \{\|\cdot\|_i : i \in I\})$ нормируемо $\iff$ существует конечное подмножество $I_0 \subset I$, такое, что система полунорм $\{\|\cdot\|_i : i \in I_0\}$ эквивалентна исходной.

Упражнение 4.9. Пространство $\mathscr{O}(U)$ ненормируемо.

Замечание 4.3. Можно показать (мы этим заниматься не будем), что для хаусдорфова E наличие счетного (точнее, не более чем счетного) подмножества $I_0 \subset I$, задающего ту же топологию, эквивалентно *метризуемости* E.

Если на полинормированном пространстве введено умножение, превращающее его в ассоциативную алгебру, то естественно требовать, чтобы умножение было непрерывно. Однако по техническим причинам обычно требуют, чтобы оно было лишь *раздельно непрерывно:*

Определение 4.5. *Полинормированная алгебра* — это полинормированное пространство A, снабженное структурой алгебры так, что для каждого $a \in A$ операторы

$$L_a \colon A \to A,\ b \mapsto ab \quad \text{и} \quad R_a \colon A \to A,\ b \mapsto ba$$

непрерывны. Если же непрерывно отображение $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto ab$, то A называется *полинормированной алгеброй с совместно непрерывным умножением.*

Впоследствии нам встретятся примеры полинормированных алгебр, умножение в которых не является совместно непрерывным (так что требование раздельной непрерывности — это вынужденная необходимость). А пока сделайте следующее

Упражнение 4.10. $\mathscr{O}(U)$ — полинормированная алгебра с совместно непрерывным умножением.

4.2. Голоморфное исчисление: построение и свойства

Теперь мы в состоянии строго определить, что такое голоморфное исчисление в банаховой алгебре, и построить это исчисление. Итак, пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$ — ее элемент, $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Напомним, что через $\mathscr{O}(U)$ обозначается алгебра голоморфных функций на U, снабженная компактно-открытой топологией. Через $t \in \mathscr{O}(U)$ обозначим функцию $t(z) = z$.

Определение 4.6. *Голоморфным исчислением* от a на U называется непрерывный унитальный гомоморфизм $\gamma_h \colon \mathscr{O}(U) \to A$, такой, что $\gamma_h(t) = a$.

Предложение 4.1. *Предположим, что голоморфное исчисление γ_h от a на U существует. Тогда:*

1) *оно является продолжением рационального (т.е. $\gamma_h|_{R(U)} = \gamma_r$);*

2) $\sigma(a) \subset U$;
3) *голоморфное исчисление единственно.*

Доказательство. Первое утверждение следует из соотношения $\gamma_h(t) = a$, а второе — из первого и из свойств рационального исчисления. Наконец, утверждение о единственности вытекает из непрерывности γ_h и теоремы Рунге. $\square$

Построить голоморфное исчисление проще всего в случае, когда U — круг с центром в нуле или вся комплексная плоскость.

Предложение 4.2. *Пусть $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ — круг радиуса R, содержащий спектр $\sigma(a)$ элемента $a \in A$. (При $R = \infty$ мы полагаем $\mathbb{D}_R = \mathbb{C}$). Тогда голоморфное исчисление от a на $\mathbb{D}_R$ существует и единственно.*

Доказательство. Возьмем произвольную $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ и разложим ее в ряд Тэйлора: $f(z) = \sum_n c_n z^n$. Покажем, что ряд $\sum_n c_n a^n$ сходится в A. Для этого зафиксируем любое ρ так, чтобы $r(a) < \rho < R$; тогда из формулы спектрального радиуса (см. §2.5) следует, что найдется $N \in \mathbb{N}$, такое, что $\|a^n\|^{1/n} < \rho$ при $n > N$. Следовательно, $C := \sup_n \|a^n\|/\rho^n < \infty$. Поэтому

$$\sum_n |c_n| \|a^n\| \leqslant C \sum_n |c_n| \rho^n, \tag{4.3}$$

и ряд $\sum_n c_n a^n$ абсолютно сходится. Обозначим его сумму через $\gamma_h(f)$. Простые вычисления со степенными рядами показывают, что построенное отображение $\gamma_h : \mathscr{O}(\mathbb{D}_R) \to A$ является унитальным гомоморфизмом, причем $\gamma_h(t) = a$. Наконец, из (4.3) следует, что $\|\gamma_h(f)\| \leqslant C\|f\|_\rho$ для всех $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ (см. пример 4.2), поэтому γ_h непрерывен. $\square$

Из предыдущего предложения следует, в частности, что от любого элемента унитальной банаховой алгебры можно «брать целые функции». В частности, для любого $a \in A$ определена экспонента $\exp(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n/n!$.

Если $U \subset \mathbb{C}$ — произвольное открытое множество, содержащее $\sigma(a)$, то строить голоморфное исчисление от a на U тем же способом, что и выше, не получается: ведь не любая же голоморфная в U функция разлагается в ряд Тэйлора на U. С другой стороны, для голоморфных функций в U существует удобное представление в виде интеграла Коши.

Напоминание 4.1. Если $V \subset U$ — ограниченное открытое подмножество, такое, что $\overline{V} \subset U$, и граница ∂V состоит из конечного числа гладких кривых, то для любой $f \in \mathscr{O}(U)$ и любого $z \in V$ справедлива *интегральная формула Коши*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{4.4}$$

(интегрирование по ∂V ведется, как положено, с учетом ориентации).

С учетом формулы Коши, естественно попытаться построить голоморфное исчисление от элемента $a \in A$ следующим образом: подберем V так, чтобы $\sigma(a) \subset V \subset \overline{V} \subset U$, подставим a вместо z в правую часть формулы (4.4) и возьмем получившееся выражение в качестве *определения* элемента $f(a) = \gamma_h(f)$. Конечно, чтобы придать этому определению смысл, нужно сперва договориться, что называть интегралом от функции со значениями в банаховом пространстве.

Отступление: интегрирование векторнозначных функций

Пусть E — банахово пространство, $f\colon [a,b] \to E$ — функция. Интеграл Римана $\int_a^b f(t)\, dt$ можно определить, как и для скалярных функций, как предел интегральных сумм. А можно сделать еще проще:

Определение 4.7. Элемент $x \in E$ называется *интегралом* от f по $[a,b]$ (и обозначается через $\int_a^b f(t)\, dt$), если для любого $\omega \in E^*$ функция $\omega \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ интегрируема по Риману, и $\omega(x) = \int_a^b \omega(f(t))\, dt$.

Конечно, если интеграл от f существует, то он — единственный (почему?).

Упражнение 4.11. 1) Если $f\colon [a,b] \to E$ непрерывна, то она интегрируема, и

$$\Big\| \int_a^b f(t)\, dt \Big\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\, dt \leqslant \|f\|_\infty (b-a),$$

где $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|$.

2) Если $T \in \mathscr{B}(E,F)$, то $T\Big(\int_a^b f(t)\, dt\Big) = \int_a^b T(f(t))\, dt$ для любой непрерывной функции $f\colon [a,b] \to E$.

Определение 4.8. Пусть Γ — гладкая ориентированная кривая в $\mathbb{C}$, параметризованная при помощи отображения $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ класса C^1. Для произвольной непрерывной функции $f\colon \Gamma \to E$ положим по определению $\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt$.

Как и для скалярных функций, интеграл от f по кусочно гладкой кривой определяется как сумма интегралов по ее «гладким кускам». Наконец, если $V \subset \mathbb{C}$ — ограниченное открытое множество, граница ∂V которого состоит из конечного числа кусочно гладких кривых, то интеграл от f по ∂V определяется как сумма интегралов по этим кривым, ориентированным согласованно с ориентацией V.

* * *

Перейдем к построению голоморфного исчисления в общем случае.

Теорема 4.1. *Пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$ — ее элемент, $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, содержащее $\sigma(a)$. Тогда существует единственное голоморфное исчисление $\gamma_h \colon \mathscr{O}(U) \to A$ от a на U.*

Доказательство. Выберем открытое ограниченное множество V с границей ∂V, состоящей из конечного числа кусочно гладких кривых, так, чтобы $\sigma(a) \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Для каждой $f \in \mathscr{O}(U)$ положим

$$\gamma_h(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} f(\zeta)(\zeta 1 - a)^{-1} d\zeta.$$

Очевидно, отображение $\gamma_h \colon \mathscr{O}(U) \to A$ корректно определено (поскольку под знаком интеграла стоит непрерывная функция) и линейно. Кроме того, легко видеть (проверьте!), что существует $C > 0$, такое, что $\|\gamma_h(f)\| \leqslant C\|f\|_{\partial V}$ для любой $f \in \mathscr{O}(U)$. Следовательно, γ_h непрерывно.

Таким образом, нам остается показать, что γ_h — унитальный гомоморфизм, и что $\gamma_h(t) = a$. Заметим, что для этого достаточно проверить два тождества:

(i) $\gamma_h(1) = 1$;
(ii) $\gamma_h((t - \lambda)f) = (a - \lambda 1)\gamma_h(f)$ для всех $f \in \mathscr{O}(U)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

В самом деле, из (i) и (ii) по индукции легко следует, что $\gamma_h(f) = f(a)$ для любого многочлена f; в частности, $\gamma_h(t) = a$. Далее, если $\lambda \notin U$, то $(a - \lambda 1)^n \gamma_h((t - \lambda)^{-n}) = \gamma_h(1) = 1$, поэтому $\gamma_h((t - \lambda)^{-n}) = (a - \lambda 1)^{-n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Разлагая произвольную рациональную функцию $f \in R(U)$ в сумму простейших дробей, мы видим, что γ_h совпадает на $R(U)$ с рациональным исчислением γ_r; в частности, $\gamma_h|_{R(U)}$ — гомоморфизм. Отсюда, с учетом теоремы Рунге и совместной непрерывности умножения в $\mathscr{O}(U)$ и A, следует, что γ_h — гомоморфизм. Действительно, пусть $f, g \in \mathscr{O}(U)$, и пусть $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — последовательности в $R(U)$, сходящиеся к f и g соответственно. Тогда $f_n g_n \to fg$ в $\mathscr{O}(U)$

и $\gamma_h(f_n)\gamma_h(g_n) \to \gamma_h(f)\gamma_h(g)$ в A, поэтому

$$\gamma_h(fg) = \lim_n \gamma_h(f_n g_n) = \lim_n \gamma_h(f_n)\gamma_h(g_n) = \gamma_h(f)\gamma_h(g),$$

так что γ_h — гомоморфизм. Итак, нам остается проверить выполнение условий (i) и (ii).

Для проверки (i) фиксируем произвольный функционал $\omega \in A^*$ и возьмем $R > 0$, такое, что $R > \|a\|$ и $\overline{V} \subset \mathbb{D}_R$. Функция $\zeta \mapsto \omega((\zeta 1 - a)^{-1})$ голоморфна в окрестности области $\mathbb{D}_R \setminus \overline{V}$, поэтому ее интеграл по ориентированной границе этой области равен нулю. Отсюда следует, что

$$\omega(\gamma_h(1)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} \omega((\zeta 1 - a)^{-1})\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \mathbb{D}_R} \omega((\zeta 1 - a)^{-1})\, d\zeta. \quad (4.5)$$

С другой стороны, при $\zeta \in \partial\mathbb{D}_R$ мы имеем

$$(\zeta 1 - a)^{-1} = \zeta^{-1}(1 - \zeta^{-1}a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n-1}a^n$$

(см. теорему 2.1), причем ряд сходится равномерно на $\partial\mathbb{D}_R$. Поэтому цепочку равенств (4.5) можно продолжить следующим образом:

$$\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \omega(a^n)\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_R} \zeta^{-n-1} d\zeta = \omega(1).$$

Ввиду произвольности $\omega \in A^*$, это дает равенство (i).

Теперь проверим (ii):

$$\begin{aligned}
&\gamma_h((t-\lambda)f) - (a - \lambda 1)\gamma_h(f) = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} (\zeta - \lambda) f(\zeta)(\zeta 1 - a)^{-1} d\zeta - (a - \lambda 1)\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} f(\zeta)(\zeta 1 - a)^{-1} d\zeta = \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} f(\zeta)\big[(\zeta - \lambda)1 - (a - \lambda 1)\big](\zeta 1 - a)^{-1} d\zeta = \\
&\qquad\quad = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} f(\zeta)(\zeta 1 - a)(\zeta 1 - a)^{-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} f(\zeta)\, d\zeta \cdot 1 = 0,
\end{aligned}$$

поскольку f голоморфна в U. Таким образом, (ii) доказано. Как уже было замечено выше, отсюда следует, что γ_h — гомоморфизм. □

Голоморфные исчисления на разных открытых множествах согласованы:

Упражнение 4.12. Пусть $\sigma(a) \subset V \subset U$, где U, V — открытые подмножества $\mathbb{C}$. Обозначим через $r_{UV} : \mathscr{O}(U) \to \mathscr{O}(V)$ гомоморфизм, сопоставляющий каждой голоморфной функции в U ее ограничение на V.

Пусть γ_h^U и γ_h^V — голоморфные исчисления от a на U и V соответственно. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}(U) \arrow[d, "r_{UV}"'] \arrow[dr, "\gamma_h^U"] & \\ \mathscr{O}(V) \arrow[r, "\gamma_h^V"'] & A \end{tikzcd}$$

Поскольку голоморфное исчисление является продолжением рационального и не зависит от выбора открытого множества, содержащего спектр, мы вправе вместо $\gamma_h(f)$ писать просто $f(a)$ для любой голоморфной функции f, определенной в некоторой окрестности спектра $\sigma(a)$.

Довольно часто голоморфное исчисление от того или иного элемента какой-нибудь «классической» банаховой алгебры удается описать «в явном виде», т.е. не прибегая к контурному интегрированию. Чтобы в этом убедиться, сделайте следующее

Упражнение 4.13. Пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in \in A$ — ее элемент, f — голоморфная функция, определенная в окрестности $\sigma(a)$. В каждом из перечисленных ниже случаев укажите, что такое $f(a)$:

1) $A = C(\Omega)$, $a \in A$ — любой элемент.
2) $A = \ell^\infty$, $a \in A$ — любой элемент.
3) $A = L^\infty(X, \mu)$, $a \in A$ — любой элемент.
4) $A = \mathscr{B}(\ell^p)$ или $\mathscr{B}(c_0)$, $a = M_\lambda$ — диагональный оператор.
5) $A = \mathscr{B}(L^p(X, \mu))$, $a = M_f$ — оператор умножения.
6) $A = \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$, $a = T_b$ — оператор двустороннего сдвига.
7) $A = \mathscr{B}(\ell^2)$, $a = T_r$ — оператор правого сдвига.

Вместо того, чтобы говорить о «голоморфном исчислении в произвольной окрестности спектра», удобно говорить о «голоморфном исчислении на спектре». Для этого нам понадобится еще одна полинормированная алгебра, а именно, *алгебра ростков голоморфных функций*. Определяется она следующим образом.

Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$. Рассмотрим множество всех пар (U, f), где $U \supset K$ — открытое множество, и $f \in \mathscr{O}(U)$. На этом множестве введем отношение эквивалентности, полагая $(U, f) \sim (V, g)$, если существует окрестность $W \supset K$, такая, что $W \subset U \cap V$ и $f|_W = g|_W$. Класс эквивалентности называется *ростком* голоморфной функции на K, а множество всех ростков обозначается через $\mathscr{O}(K)$. Нетрудно проверить, что $\mathscr{O}(K)$ становится алгеброй, если определить алгебраические операции над ростками как поточечные операции над их представителями.

Как и в случае алгебры рациональных функций $R(M)$ (см. §2.4), каждому ростку $f \in \mathscr{O}(K)$ можно приписать значение $f(z)$ в произвольной точке $z \in K$, взяв в качестве $f(z)$ значение в точке z любого его представителя. Получаем функцию $\tilde{f}\colon K \to \mathbb{C}$, $\tilde{f}(z) = f(z)$. Отображение $\mathscr{O}(K) \to \mathbb{C}^K$, $f \mapsto \tilde{f}$ является, очевидно, унитальным гомоморфизмом. Отметим, что он инъективен тогда и только тогда, когда K не содержит изолированных точек (почему?). Тем не менее, этот гомоморфизм всегда сохраняет спектр (ср. замечание 2.10):

Упражнение 4.14. 1) $f \in \mathscr{O}(K)$ обратим $\iff$ $\tilde{f} \in \mathbb{C}^K$ обратим, т.е. $f(z) \neq 0$ для любого $z \in K$.

2) $\sigma_{\mathscr{O}(K)}(f) = \sigma_{\mathbb{C}^K}(\tilde{f}) = f(K)$ для любой $f \in \mathscr{O}(K)$.

Топология на $\mathscr{O}(K)$ вводится следующим образом. Для каждой окрестности U компакта K обозначим через $r_{UK}\colon \mathscr{O}(U) \to \mathscr{O}(K)$ гомоморфизм «ограничения», определяемый очевидным образом. Назовем полунорму $\|\cdot\|$ на $\mathscr{O}(K)$ *допустимой*, если для любой окрестности $U \supset K$ полунорма $f \mapsto \|r_{UK}(f)\|$ непрерывна на $\mathscr{O}(U)$. Превратим $\mathscr{O}(K)$ в полинормированное пространство, снабдив его семейством всех допустимых полунорм.

Замечание 4.4. Указанный способ введения топологии встречается довольно часто; по-научному он называется «индуктивный предел». При этом используется следующее обозначение: $\mathscr{O}(K) = \varinjlim_{U \supset K} \mathscr{O}(U)$. При помощи той же конструкции вводится топология, например, на пространстве $\mathscr{D}$ гладких функций на прямой с компактным носителем, играющем важную роль в теории обобщенных функций.

Упражнение 4.15. Пусть E — полинормированное пространство. Линейный оператор $T\colon \mathscr{O}(K) \to E$ непрерывен тогда и только тогда, когда для любой окрестности $U \supset K$ оператор $T \circ r_{UK}\colon \mathscr{O}(U) \to E$ непрерывен.

На самом деле, указанное в последнем упражнении свойство полностью характеризует топологию на $\mathscr{O}(K)$:

Упражнение 4.16. Пусть $\mathscr{O}(K)$ снабжено каким-либо семейством полунорм, таким образом, что выполнено свойство, указанное в предыдущем упражнении. Тогда топология, порожденная этим семейством, совпадает с топологией, порожденной семейством всех допустимых полунорм на $\mathscr{O}(K)$.

Упражнение 4.17*. $\mathscr{O}(K)$ — хаусдорфова полинормированная алгебра с совместно непрерывным умножением.

Теорема 4.2. *Пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$ — ее элемент, $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, содержащий $\sigma(a)$. Существует единственный непрерывный унитальный гомоморфизм $\gamma_h^K : \mathscr{O}(K) \to A$, такой, что $\gamma_h^K(t) = a$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathscr{O}(K)$ — произвольный росток, и пусть $g \in \mathscr{O}(U)$ (где $U \supset K$) — некоторый его представитель. Положим по определению $\gamma_h^K(f) = \gamma_h^U(g)$. Из упражнения 4.12 легко выводится, что γ_h^K — корректно определенный унитальный гомоморфизм, причем $\gamma_h^K(t) = a$, и $\gamma_h^K \circ r_{UK} = \gamma_h^U$ для любой окрестности $U \supset K$. Непрерывность γ_h^K следует из упражнения 4.15, а единственность — из единственности голоморфного исчисления в окрестности спектра (см. предложение 4.1, п.3). $\square$

Определение 4.9. Гомоморфизм $\gamma_h^K : \mathscr{O}(\sigma(a)) \to A$, описанный в предыдущем предложении, называется *голоморфным исчислением* от элемента $a \in A$ на компакте $K \supset \sigma(a)$.

Утверждения теорем 4.1 и 4.2 удобно переформулировать следующим образом (ср. теорему 2.7):

Теорема 4.3. *Пусть A — унитальная банахова алгебра, $U \subset \mathbb{C}$ — непустое открытое множество, $K \subset \mathbb{C}$ — непустой компакт. Существуют канонические биекции*

$$\Big\{ a \in A : \sigma(a) \subset U \Big\} \quad \rightleftarrows \quad \left\{ \begin{matrix} \textit{унитальные непрерывные} \\ \textit{гомоморфизмы } \mathscr{O}(U) \to A \end{matrix} \right\}$$

$$\Big\{ a \in A : \sigma(a) \subset K \Big\} \quad \rightleftarrows \quad \left\{ \begin{matrix} \textit{унитальные непрерывные} \\ \textit{гомоморфизмы } \mathscr{O}(K) \to A \end{matrix} \right\}$$

Здесь стрелки, действующие слева направо, сопоставляют элементу $a \in A$ его голоморфное исчисление на U (соответственно, K), а стрелка, действующая справа налево, сопоставляет гомоморфизму π элемент $\pi(t)$, где $t(z) = z$ для любого $z \in U$ (соответственно, любого $z \in K$).

Разумеется, наименьший компакт, для которого справедлива теорема 4.2 — это сам $\sigma(a)$. В этом случае говорят о *голоморфном исчислении на спектре.* В дальнейшем вместо $\gamma_h^{\sigma(a)}(f)$ мы будем, когда это удобно, писать $f(a)$.

Теорема 4.4 (об отображении спектра). *Для любой* $f \in \mathscr{O}(\sigma(a))$ *справедливо равенство* $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.

С учетом упражнения 4.14, эту теорему можно переформулировать так:

Теорема 4.4′. Гомоморфизм $\gamma_h^{\sigma(a)} : \mathscr{O}(\sigma(a)) \to A$ сохраняет спектр.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\gamma_h^{\sigma(a)}$ (обозначаемый далее просто γ) переводит необратимые элементы в необратимые. Пусть $f \in \mathscr{O}(\sigma(a))$ необратим; тогда $f(\lambda) = 0$ в некоторой точке $\lambda \in \sigma(a)$. Из свойств голоморфных функций следует, что $f = (t - \lambda)g$ для некоторого $g \in \mathscr{O}(\sigma(a))$. Следовательно, $\gamma(f) = (a - \lambda 1)\gamma(g)$. Но $a - \lambda 1$ необратим, поэтому и $\gamma(f)$ необратим (см. лемму 2.3). □

Следствие 4.1. *Для любого* $a \in A$ *элемент* $\exp(a)$ *обратим.*

Естественно поинтересоваться, справедлив ли аналог теоремы об отображении спектра для его частей:

Упражнение 4.18. Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$ — ограниченный оператор. Верно ли равенство $\sigma_p(f(T)) = f(\sigma_p(T))$, если

1) $f \in \mathbb{C}[t]$;
2) $f \in R(M)$ (где $M \supset \sigma(T)$);
3) $f \in \mathscr{O}(U)$ (где $U \supset \sigma(T)$ — область);
4) $f \in \mathscr{O}(U)$ (где $U \supset \sigma(T)$ — открытое множество).

Тот же вопрос для $\sigma_c(T)$, $\sigma_r(T)$, $\sigma_{ap}(T)$, $\sigma_{su}(T)$, $\sigma_{com}(T)$.

Вот еще два важных свойства голоморфного исчисления:

Упражнение 4.19 (перестановочность с гомоморфизмами). Пусть $\varphi \colon A \to B$ — унитальный гомоморфизм банаховых алгебр, и пусть $a \in A$. Тогда $\varphi(f(a)) = f(\varphi(a))$ для любой $f \in \mathscr{O}(\sigma(a))$.

Упражнение 4.20 (теорема о композиции). Пусть $a \in A$, $f \in \mathscr{O}(\sigma(a))$ и $g \in \mathscr{O}(\sigma(f(a)))$. Тогда $g(f(a)) = (g \circ f)(a)$.

Обсудим теперь некоторые полезные применения голоморфного исчисления.

Упражнение 4.21. Пусть $\sigma(a)$ не пересекается с некоторым лучом, выходящим из начала координат. Тогда

1) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $b \in A$ такой, что $b^n = a$;
2) существует $b \in A$ такой, что $\exp(b) = a$.

Поскольку спектр любой $n \times n$-матрицы конечен, мы получаем

Следствие 4.2. *Если* $a \in M_n(\mathbb{C})$ *— обратимая матрица, то* $a = \exp(b)$ *для некоторой* $b \in M_n(\mathbb{C})$*. Иными словами, отображение* $\exp\colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Inv}(M_n(\mathbb{C}))$ *— сюръекция.*

Упражнение 4.22. Справедлив ли аналог предыдущего утверждения в алгебрах $\mathscr{B}(E)$? $C[a,b]$? $C(\mathbb{T})$? ℓ^∞? $L^\infty(X,\mu)$?

Чтобы получить более подробную информацию об образе экспоненциального отображения $\exp\colon A \to \mathrm{Inv}(A)$, обозначим через $\mathrm{Inv}_0(A)$ связную компоненту единицы группы $\mathrm{Inv}(A)$ и заметим, что $\exp(A) \subset \mathrm{Inv}_0(A)$ ввиду связности A.

Упражнение 4.23. Пусть A — унитальная банахова алгебра.
1) $\mathrm{Inv}_0(A)$ — нормальная подгруппа в $\mathrm{Inv}(A)$.
2) $\exp(A)$ порождает $\mathrm{Inv}_0(A)$ как группу.
3) $\mathrm{Inv}_0(A) = \exp(A)$, если A коммутативна.

Упражнение 4.24*. (Для любителей топологии). Пусть $A = C(\Omega)$ — алгебра непрерывных функций на компакте Ω. Докажите, что факторгруппа $\mathrm{Inv}(A)/\exp(A)$ изоморфна первой группе когомологий $H^1(\Omega,\mathbb{Z})$.

4.3. О неаналитических функциональных исчислениях

Теорема о голоморфном исчислении применима, в частности, к алгебре $\mathscr{B}(E)$ ограниченных операторов в банаховом пространстве. Таким образом, полиномиальное исчисление $\gamma_p\colon \mathbb{C}[t] \to \mathscr{B}(E)$ от любого оператора $T \in \mathscr{B}(E)$ продолжается до рационального $\gamma_r\colon R(\sigma(T)) \to \mathscr{B}(E)$, а рациональное — до голоморфного $\gamma_h\colon \mathscr{O}(\sigma(T)) \to \mathscr{B}(E)$. Естественно спросить, нельзя ли расширить голоморфное исчисление на какую-нибудь бо́льшую алгебру, состоящую из функций (или ростков функций) на спектре:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[t] \arrow[r] \arrow[dr, "\gamma_p"'] & R(\sigma(T)) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_r"'] & \mathscr{O}(\sigma(T)) \arrow[r] \arrow[dl, "\gamma_h"'] & A \arrow[dll, dashed, "?"] \\
& \mathscr{B}(E) & &
\end{tikzcd}$$

С точки зрения теории операторов, желательно, чтобы A была достаточно большой для того, чтобы допускать разбиения единицы. Это позволило бы лучше понять «устройство» оператора T, в частности, построить для него большое семейство инвариантных подпространств.

Для некоторых операторов такое исчисление действительно существует:

Упражнение 4.25. *("Научно-исследовательское").* На какие функциональные алгебры можно продолжить голоморфное исчисление от следующих операторов?

1) диагональный оператор $M_\lambda \in \mathscr{B}(\ell^p)$;
2) оператор умножения $M_f \in \mathscr{B}(L^p(X,\mu))$;
3) оператор двустороннего сдвига $T_b \in \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$.

Пожалуй, «самая маленькая» из «классических» функциональных алгебр на каком-либо открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, допускающая разбиения единицы — это алгебра гладких функций $C^\infty(U)$. На этой алгебре есть каноническая топология, задающая равномерную сходимость на компактах со всеми частными производными. Эту топологию можно описать при помощи полунорм следующим образом.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Для каждого набора (мультииндекса) $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ положим, как обычно, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ и $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Для каждого компакта $K \subset U$ и мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ введем полунорму $\|\cdot\|_{K,\alpha}$ на $C^\infty(U)$, полагая $\|f\|_{K,\alpha} = \sup_{x\in K} |D^\alpha f(x)|$. Система всех полунорм указанного вида превращает $C^\infty(U)$ в полинормированное пространство. Очевидно, оно хаусдорфово (почему?).

Упражнение 4.26. 1) $C^\infty(U)$ — полинормированная алгебра с совместно непрерывным умножением.

2) Если $U \subset \mathbb{C}$, то компактно-открытая топология на алгебре голоморфных функций $\mathscr{O}(U)$ совпадает с топологией, унаследованной из $C^\infty(U)$.

Следующее определение принадлежит Ч. Фойяшу.

Определение 4.10. Оператор $T \in \mathscr{B}(E)$ называется *обобщенным скалярным*, если существует непрерывный унитальный гомоморфизм $\gamma\colon C^\infty(\mathbb{C}) \to \mathscr{B}(E)$ такой, что $\gamma(t) = T$ (где, как обычно, $t(z) = z$ — «независимая переменная»).

Замечание 4.5. Раз уж есть обобщенные скалярные операторы, то, конечно, есть и «просто» скалярные. Но определяются они несколько сложнее, и их мы рассматривать пока не будем.

Упражнение 4.27. Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$ — обобщенный скалярный оператор. Верно ли, что гомоморфизм γ из предыдущего определения — единственный?

Приятное свойство обобщенных скалярных операторов состоит в том, что их поведение можно «локализовать»:

Упражнение 4.28. Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$ — обобщенный скалярный оператор. Тогда для любого покрытия $\mathbb{C} = U \cup V$ двумя открытыми множествами U, V существуют замкнутые T-инвариантные подпространства $F, G \subset E$ такие, что $\sigma(T|_F) \subset U$, $\sigma(T|_G) \subset V$ и $F + G = E$.
Указание. Воспользуйтесь разбиением единицы, подчиненным этому покрытию.

Замечание 4.6. Операторы, обладающие свойством, указанным в предыдущем упражнении, называются ***разложимыми*** (по Фойяшу).

Вот простейший пример:

Упражнение 4.29. Любой оператор в конечномерном пространстве — обобщенный скалярный.

Для следующего примера нам понадобится алгебра $C^\infty(\mathbb{T})$ гладких функций на единичной окружности $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$. Топология на этой алгебре вводится при помощи системы полунорм $\|f\|_n = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \dfrac{d^n}{dt^n} f(e^{it}) \right|$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Нетрудно проверить (проверьте!), что гомоморфизм ограничения $C^\infty(\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{T})$, $f \mapsto f|_{\mathbb{T}}$ непрерывен.

Упражнение 4.30. Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$ — сюръективный изометрический оператор. Тогда существует непрерывный унитальный гомоморфизм $\gamma \colon C^\infty(\mathbb{T}) \to \mathscr{B}(E)$, такой, что $\gamma(t) = T$. Как следствие, T — обобщенный скалярный.

Указание. Любая функция $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ разлагается в ряд Фурье по степеням независимой переменной t.

А вот и контрпример:

Упражнение 4.31*. Операторы правого и левого сдвига в ℓ^2 не являются обобщенными скалярными.

Литературные указания

По поводу полинормированных пространств см. [30]. Отметим, что как сам термин «полинормированное пространство», так и представленный в [30] подход к этому понятию (которому мы следуем в этих лекциях) не является самым распространенным. Как правило, в литературе по топологическим векторным пространствам первичной структурой является именно топология на векторном пространстве, а не система полунорм, задающая эту топологию. В соответствии с этим и термин «полинормированное пространство» встречается в литературе существенно реже, чем термин «локально выпуклое пространство» (см. замечание 4.2). Более подробно о топологических векторных пространствах можно почитать в учебниках У. Рудина [26], Р. Эдвардса [32] и двух Робертсонов [25].

Теорема о голоморфном исчислении в окрестности спектра содержится в [29]; см. также [26]. Алгебра ростков голоморфных функций и голоморфное исчисление на спектре обсуждаются у А. Гишарде [39]. Про обобщенные скалярные и разложимые операторы можно прочитать в [43]; кое-что об этом есть в третьем томе монографии Н. Данфорда и Дж. Шварца [11].

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГЕЛЬФАНДА

В предыдущей главе мы убедились, что любой ограниченный оператор обладает голоморфным исчислением в произвольной окрестности спектра. Для некоторых классов операторов удается добиться большего и научиться применять к ним не только голоморфные, но и гладкие, непрерывные, а иногда и некоторые разрывные функции (см. упр. 4.25). В ближайшем будущем мы познакомимся с несколькими важными результатами о существовании неаналитических функциональных исчислений для «хороших» операторов. Для этого нам придется на время отвлечься от операторов и поговорить об алгебрах, состоящих из функций.

Преобразование Гельфанда, о котором пойдет речь ниже — это некий универсальный способ «превратить» коммутативную банахову алгебру в алгебру, состоящую из непрерывных функций на некотором компакте.

5.1. Максимальные идеалы и характеры

Пусть A — (пока произвольная) унитальная алгебра.

Определение 5.1. Левый идеал $I \subset A$ называется *максимальным*, если он собственный (т.е. $I \neq A$) и не содержится ни в каком другом собственном левом идеале.

Предложение 5.1. *Любой левый идеал $I \subset A$ содержится в некотором максимальном.*

Доказательство. Рассмотрим множество M, состоящее из всевозможных собственных левых идеалов в A, содержащих I. Это множество (частично) упорядочено по включению: $J_1 \prec J_2$, если $J_1 \subset J_2$. Легко проверить, что оно удовлетворяет условиям леммы Цорна. В самом деле, пусть $C \subset M$ — линейно упорядоченное подмножество; тогда, очевидно, $J = \bigcup\{K : K \in C\}$ — левый идеал в A. Поскольку $1 \notin K$ для всех $K \in C$, то и $1 \notin J$, а, значит, J — собственный идеал. Следовательно, J — верхняя грань для C. Таким образом, условия леммы Цорна выполнены, и в M есть максимальный элемент. Это и есть максимальный идеал, содержащий I. $\square$

Замечание 5.1. Для неунитальных алгебр указанное свойство, вообще говоря, не выполняется (попробуйте привести пример). Ситуацию удается исправить, если рассматривать не все, а только так называемые *модулярные* идеалы. Нам же для наших целей вполне хватит и унитальных алгебр.

Предложение 5.2. *Пусть A — унитальная банахова алгебра. Тогда любой максимальный левый идеал в A замкнут.*

Доказательство. Если $I \subset A$ — левый идеал, то и его замыкание $\overline{I}$ — тоже левый идеал. Поэтому, если I максимален и $I \neq \overline{I}$, то $\overline{I} = A$. Это значит, что I пересекается с любым непустым открытым подмножеством в A, в частности, с множеством $\mathrm{Inv}(A)$ всех обратимых элементов (см. теорему 2.1). Отсюда $I = A$. Противоречие. □

Упражнение 5.1. Верно ли предыдущее утверждение в алгебрах $\mathscr{O}(U)$? $C^\infty(U)$? $\mathscr{O}(K)$?

Разумеется, все, что говорилось выше, переносится на правые идеалы и на двусторонние идеалы.

Упражнение 5.2. Пусть A — унитальная коммутативная алгебра. Тогда идеал $I \subset A$ — максимальный $\iff$ факторалгебра A/I — поле.

Начиная с этого момента и до конца главы мы будем рассматривать только коммутативные алгебры. Каждой коммутативной унитальной алгебре A можно сопоставить два важных множества:

Определение 5.2. *Максимальным спектром* (далее — просто спектром) A называется множество $\Omega(A)$ всех ее максимальных идеалов. *Пространством характеров* A называется множество $\mathscr{X}(A)$ всех ее ненулевых характеров.

Между $\Omega(A)$ и $\mathscr{X}(A)$ имеется тесная взаимосвязь. А именно, рассмотрим отображение $\varkappa\colon \mathscr{X}(A) \to \Omega(A)$, $\chi \mapsto \operatorname{Ker}\chi$.

Упражнение 5.3. Отображение $\varkappa$ инъективно.

Часто $\varkappa$ оказывается биекцией:

Упражнение 5.4. Пусть $A = \mathbb{C}[t]$ — алгебра многочленов. Каждой точке $z \in \mathbb{C}$ сопоставим «вычисляющий» характер $\delta_z \in \mathscr{X}(A)$, $\delta_z(f) = f(z)$. Докажите, что полученное отображение $\delta\colon \mathbb{C} \to \mathscr{X}(A)$ и отображение $\varkappa$ — биекции.

Впрочем, «часто» — это еще не «всегда»:

Упражнение 5.5. 1) Придумайте пример коммутативной унитальной алгебры A, для которой $\varkappa$ — не биекция.

2) Опишите $\mathscr{X}(A)$, $\Omega(A)$ и $\varkappa$ для алгебр $\mathbb{C}(t)$, $\mathbb{C}[[t]]$, $R(M)$, $C^\infty(\mathbb{T})$ и $\mathbb{C}[t]/(t^2)$.

3)* Сделайте то же самое для алгебры $\mathscr{O}(K)$.

4) Опишите $\mathscr{X}(A)$ для алгебр $\mathscr{O}(U)$ и $C^\infty(U)$.

А теперь от алгебр, не снабженных топологией (или снабженных ненормируемой топологией) перейдем к банаховым алгебрам.

Предложение 5.3. *Пусть A — унитальная коммутативная банахова алгебра. Тогда отображение $\varkappa\colon \mathscr{X}(A) \to \Omega(A)$, $\chi \mapsto \operatorname{Ker}\chi$ — биекция.*

Доказательство. Пусть $I \in \Omega(A)$ — максимальный идеал. Ввиду предложения 5.2, он замкнут, поэтому A/I — банахово поле (см. упр. 5.2). По теореме Гельфанда–Мазура, $A/I \cong \mathbb{C}$. Композиция факторотображения $A \to A/I$ и изоморфизма $A/I \to \mathbb{C}$ — это характер $\chi \in \mathscr{X}(A)$, у которого $\operatorname{Ker}\chi = I$. Следовательно, $\varkappa$ — сюръекция, и остается применить результат упражнения 5.3. $\square$

Следствие 5.1. *Пусть A — унитальная коммутативная банахова алгебра. Элемент $a \in A$ обратим $\iff$ $\chi(a) \neq 0$ для любого $\chi \in \mathscr{X}(A)$.*

Доказательство. ($\Longrightarrow$): тривиально.

($\Longleftarrow$): если $a \in A$ необратим, то главный идеал Aa, будучи собственным, содержится в некотором максимальном идеале I, а он является ядром характера. $\square$

А теперь, как и было обещано, изготовим из A алгебру функций.

Определение 5.3. Пусть A — унитальная коммутативная алгебра. *Преобразованием Гельфанда* элемента $a \in A$ называется функция $\hat a\colon \mathscr{X}(A) \to \mathbb{C}$, определяемая формулой $\hat a(x) = x(a)$ для любого $x \in \mathscr{X}(A)$.

Непосредственно проверяется (проверьте), что отображение $A \to \to \mathbb{C}^{\mathscr{X}(A)}$, $a \mapsto \hat a$ — унитальный гомоморфизм алгебр.

Определение 5.4. Гомоморфизм $\Gamma_A\colon A \to \mathbb{C}^{\mathscr{X}(A)}$, $\Gamma_A(a) = \hat a$ называется *преобразованием Гельфанда алгебры A*.

Замечание 5.2. $\operatorname{Ker}\Gamma_A = \bigcap\{\operatorname{Ker}\chi : \chi \in \mathscr{X}(A)\}$.

Итак, преобразование Гельфанда сопоставляет каждой унитальной коммутативной алгебре A алгебру функций $\operatorname{Im}\Gamma_A$ на множестве $\mathscr{X}(A)$. Эта конструкция, а также некоторые ее разновидности, оказалась чрезвычайно полезной, и не только в функциональном анализе, но и в других науках. Если «забыть» про ядро преобразования Гельфанда, то можно сформулировать следующий принцип (строго говоря, неверный, но полезный): *коммутативные алгебры — это алгебры функций на некоторых «пространствах»*. Этому утверждению можно придать полную строгость, только для этого нужно заменить $\mathscr{X}(A)$ на некоторое большее множество, а также несколько расширить смысл понятия «функция». Это делается в *теории схем* А. Гротендика.

Развитие и осмысление этих идей привело к появлению новой идеологии — *некоммутативной геометрии*. В широком понимании некоммутативная геометрия — это не область математики, а, скорее, точка зрения, согласно которой произвольные (некоммутативные) алгебры или кольца следует представлять себе как «кольца функций на некоммутативных пространствах»(пространствах, которых на самом деле нет). При этом в зависимости от того, какие именно алгебры и какие их «геометрические» свойства изучаются, возникает целая серия наук — некоммутативная алгебраическая геометрия, некоммутативная дифференциальная геометрия, некоммутативная топология, некоммутативная теория меры... В некотором смысле к некоммутативной геометрии можно отнести алгебраическую K-теорию и теорию квантовых групп. Мы еще вернемся к этой теме, когда будем говорить о C^*-алгебрах.

Упражнение 5.6. Опишите преобразование Гельфанда для алгебр $\mathbb{C}[t]$, $\mathbb{C}[[t]]$, $R(M)$, $\mathscr{O}(U)$, $C^\infty(U)$, $\mathscr{O}(K)$ и $\mathbb{C}[t]/(t^2)$.

Отметим, что для произвольной унитальной коммутативной алгебры A пространства $\mathscr{X}(A)$ и $\Omega(A)$ — это «всего лишь» множества. Оказывается, если A — банахова алгебра, то существует канонический способ ввести топологию на множестве $\mathscr{X}(A)$ (которое в этом случае совпадает с $\Omega(A)$; см. предложение 5.3) так, что преобразования Гельфанда элементов из A будут непрерывными функциями относительно этой топологии. Чтобы описать эту топологию, вернемся ненадолго к полинормированным пространствам.

5.2. Слабая и слабая* топологии

Пусть E — банахово пространство. Для каждого функционала $f \in E^*$ введем полунорму $\|\cdot\|_f$ на E, полагая $\|x\|_f = |f(x)|$ для каждого $x \in E$.

Определение 5.5. Топология на E, задаваемая системой полунорм $\{\|\cdot\|_f : f \in E^*\}$, называется *слабой топологией* на E и обозначается $\sigma(E, E^*)$.

А теперь применим двойственную конструкцию: возьмем вектор $x \in E$ и введем полунорму $\|\cdot\|_x$ на E^* по правилу $\|f\|_x = |f(x)|$ для каждого $f \in E^*$.

Определение 5.6. Топология на E^*, задаваемая системой полунорм $\{\|\cdot\|_x : x \in E\}$, называется *слабой* топологией* на E^* и обозначается $\sigma(E^*, E)$.

Замечание 5.3. Отметим, что последовательность $\{x_n\} \subset E$ сходится к некоторому $x \in E$ в топологии $\sigma(E, E^*)$ тогда и только тогда, когда $f(x_n) \to f(x)$ для любого $f \in E^*$ (см. упр. 4.3). В этом случае говорят, что $\{x_n\}$ *слабо сходится* к x. Аналогично, последовательность $\{f_n\} \subset E^*$ сходится к некоторому $f \in E^*$ в топологии $\sigma(E^*, E)$ тогда и только тогда, когда $f_n(x) \to f(x)$ для любого $x \in E$.

Упражнение 5.7. Топологии $\sigma(E, E^*)$ и $\sigma(E^*, E)$ хаусдорфовы.

Следующее упражнение объясняет, почему слабые топологии так называются:

Упражнение 5.8. 1) Слабая топология $\sigma(E, E^*)$ не сильнее, чем исходная топология на E, и совпадает с ней при $\dim E < \infty$.

2) Слабая* топология $\sigma(E^*, E)$ не сильнее, чем топология на E^*, задаваемая нормой $\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$, и совпадает с ней при $\dim E < \infty$.

Более того, справедливо следующее утверждение:

Упражнение 5.9. Топологии $\sigma(E, E^*)$ и $\sigma(E^*, E)$ ненормируемы, если E бесконечномерно. Как следствие, в этом случае топология $\sigma(E, E^*)$ строго слабее, чем исходная топология на E, а топология $\sigma(E^*, E)$ строго слабее, чем топология на E^*, задаваемая нормой $\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$.

Следующее свойство пригодится нам в дальнейшем.

Упражнение 5.10. Пусть X — топологическое пространство.

1) Отображение $\varphi\colon X \to (E, \sigma(E, E^*))$ непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого $f \in E^*$ отображение $f \circ \varphi\colon X \to \mathbb{C}$ непрерывно.

2) Отображение $\varphi\colon X \to (E^*, \sigma(E^*, E))$ непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого $y \in E$ отображение $X \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \varphi(x)(y)$ непрерывно.

Замечание 5.4. *(Необязательное).* Полезно сравнить результат предыдущего упражнения с упражнением 4.15: там имела место «двойственная» ситуация. Дело в том, что слабая и слабая* топологии — это частные случаи так называемой *проективной* топологии, а топология на $\mathscr{O}(K)$ — частный случай *индуктивной* топологии. Более подробно об этом можно прочитать, например, в [25].

Итак, слабая топология на E, как правило, слабее, чем исходная. Поэтому и функционалов на E, непрерывных в слабой топологии, должно быть меньше или, по крайней мере, не больше, чем в исходной. Оказывается, их ровно столько же:

Упражнение 5.11. Линейный функционал $f\colon E \to \mathbb{C}$ непрерывен $\iff$ он непрерывен в слабой топологии. Иными словами, $\big(E, \sigma(E, E^*)\big)^* = E^*$.

Так что слабая топология хоть и слабее исходной, но «не намного». Вот еще одна иллюстрация того же явления:

Упражнение 5.12. Линейное подпространство $F \subset E$ замкнуто $\iff$ оно замкнуто в слабой топологии.

Справедливы ли аналогичные утверждения про слабую* топологию? Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним некоторые стандартные факты из функционального анализа.

Напоминание 5.1. *Канонические вложение* $i_E\colon E \to E^{**}$ задается формулой

$$i_E(x) = F_x, \quad \text{где} \quad F_x(f) = f(x) \quad \text{для любого } f \in E^*.$$

Каноническое вложение всегда изометрично. Если оно сюръективно (а, значит, является изометрическим изоморфизмом между E и E^{**}), то E называется *рефлексивным*.

Примеры-упражнения. 1) Пространства ℓ^p и $L^p(X, \mu)$ рефлексивны при $1 < p < \infty$. Гильбертово пространство рефлексивно,

2) Пространства c_0, ℓ^1, ℓ^∞, $C[a,b]$, $L^1[a,b]$, $L^\infty[a,b]$ нерефлексивны.

Теперь мы можем описать функционалы на E^*, непрерывные в слабой* топологии:

Упражнение 5.13. Линейный функционал $F\colon E^* \to \mathbb{C}$ непрерывен в слабой* топологии $\iff$ он имеет вид F_x для некоторого (единственного) $x \in E$. Иными словами, $\big(E^*, \sigma(E^*, E)\big)^* = \operatorname{Im} i_E$.

Следствие 5.2. *Следующие свойства банахова пространства E эквивалентны:*

1) *E рефлексивно.*

2) *Линейный функционал $F\colon E^* \to \mathbb{C}$ непрерывен по норме $\iff$ он непрерывен в слабой* топологии.*

Упражнение 5.14. E нерефлексивно $\iff$ в E^* существуют замкнутые по норме, но не слабо* замкнутые линейные подпространства.

Вот полезное применение слабой* топологии. Пусть $T \in \mathscr{B}(E, F)$ — ограниченный оператор между банаховыми пространствами. Напомним, что в общем случае утверждения "T инъективен" и "T^* имеет плотный образ" неэквивалентны (см. упр. 3.9). Тем не менее,

Упражнение 5.15. $T \in \mathscr{B}(E, F)$ инъективен $\iff$ $\operatorname{Im} T^*$ слабо* плотен в E^*.

Пожалуй, наиболее для нас важным свойством слабой* топологии будет следующее:

Теорема 5.1 (Банах–Алаоглу). *Для любого банахова пространства E замкнутый единичный шар сопряженного пространства $\overline{U}_{E^*} = \{f \in E^* : \|f\| \leqslant 1\}$ компактен в слабой* топологии.*

Доказательство. (Набросок). Рассмотрим множество $\overline{\mathbb{D}}^{\overline{U}_E}$, состоящее из всевозможных отображений из замкнутого единичного шара $\overline{U}_E = \{x \in E : \|x\| \leqslant 1\}$ в замкнутый единичный диск $\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{C}$. Это множество — компакт в тихоновской топологии. Рассмотрим отображение $\overline{U}_{E^*} \to \overline{\mathbb{D}}^{\overline{U}_E}$, сопоставляющее каждому функционалу его ограничение на $\overline{U}_E$. Нетрудно проверить (проверьте!), что оно топологически инъективно и имеет замкнутый образ. Следовательно, $\overline{U}_{E^*}$ гомеоморфен замкнутому подмножеству компактного пространства и поэтому компактен. $\square$

Замечание 5.5. Для сравнения напомним, что единичный шар в бесконечномерном нормированном пространстве некомпактен в исходной топологии.

Следствие 5.3. *Замкнутый единичный шар $\overline{U}_{E^*}$ замкнут и в слабой* топологии.*

Упражнение 5.16. Замкнутый единичный шар $\overline{U}_E \subset E$ компактен в слабой топологии $\sigma(E, E^*)$ тогда и только тогда, когда E рефлексивно.

5.3. Топология на спектре и преобразование Гельфанда

Теперь мы в состоянии определить топологию на спектре унитальной коммутативной банаховой алгебры A. Напомним (см. предложение 5.3), что существует каноническая биекция между пространством (ненулевых) характеров $\mathscr{X}(A)$ и максимальным спектром $\Omega(A)$, которая сопоставляет каждому характеру его ядро. Поэтому в дальнейшем мы будем отождествлять $\mathscr{X}(A)$ и $\Omega(A)$.

Определение 5.7. Ограничение слабой* топологии $\sigma(A^*, A)$ на $\mathscr{X}(A) \subset A^*$ называется *гельфандовой топологией* на $\mathscr{X}(A) = \Omega(A)$.

Предложение 5.4. $\Omega(A)$ — *компакт в гельфандовой топологии.*

Доказательство. Напомним, что $\mathscr{X}(A) \subset \overline{U}_{A^*}$ (см. следствие 2.2). Ввиду теоремы Банаха–Алаоглу, нам достаточно доказать замкнутость $\mathscr{X}(A)$ в $\overline{U}_{A^*}$. Возьмем произвольный функционал $f \in \overline{\mathscr{X}(A)}$ (где замыкание берется в слабой* топологии) и покажем, что он — характер. Для этого фиксируем $a, b \in A$ и $\varepsilon > 0$ и подберем $\chi \in \mathscr{X}(A)$ так, чтобы он лежал в слабой* окрестности $U_{a,b,ab}(f, \varepsilon)$ функционала f. Напомним: это означает, что значения f и χ на каждом из элементов a, b и ab отличаются друг от друга менее, чем на ε. Следовательно,

$$|f(ab) - f(a)f(b)| \leqslant |f(ab) - \chi(ab)| + |\chi(a)\chi(b) - \chi(a)f(b)| + \\ + |\chi(a)f(b) - f(a)f(b)| < \varepsilon + \|a\|\varepsilon + \|b\|\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем $f(ab) = f(a)f(b)$, т.е. f — характер. Осталось показать, что $f \neq 0$. Для этого подберем $\chi' \in \mathscr{X}(A)$ так, чтобы $|\chi'(1) - f(1)| < 1/2$. Поскольку $\chi'(1) = 1$, отсюда следует, что $f(1) \neq 0$. Следовательно, f — ненулевой характер, т.е. элемент $\mathscr{X}(A)$. ☐

Итак, топология на $\Omega(A)$ введена. Следующая теорема показывает, что преобразование Гельфанда (см. определения 5.3 и 5.4) замечательным образом с ней согласовано:

Теорема 5.2. *Пусть A — унитальная коммутативная банахова алгебра. Справедливы следующие утверждения:*

1) $\hat{a} \in C(\Omega(A))$ *для любого* $a \in A$;
2) $\Gamma_A \colon A \to C(\Omega(A))$ — *унитальный гомоморфизм нормы* 1;
3) $\|\hat{a}\| = r(a)$ *для любого* $a \in A$;
4) $\sigma_A(a) = \hat{a}(\Omega)$ *для любого* $a \in A$ *(т.е.* Γ_A *сохраняет спектр);*
5) $\operatorname{Ker} \Gamma_A = \bigcap\{I : I \in \Omega(A)\} = \{a \in A : \sigma(a) = 0\}$.

Доказательство. 1) Из определения функции $\hat{a}$ следует, что она является ограничением на $\mathscr{X}(A) \subset A^*$ функционала $F_a = i_A(a) \in A^{**}$, который непрерывен в слабой* топологии (см. упр. 5.13).

4) Если $a \in A$ необратим, то $\hat{a}(\chi) = \chi(a) = 0$ для некоторого $\chi \in \mathscr{X}(A)$ (см. следствие 5.1), так что $\hat{a}$ — необратимый элемент в $C(\Omega(A))$. Таким образом, Γ_A переводит необратимые элементы в необратимые, а, значит, сохраняет спектр.

3) Следует непосредственно из 4) и определения sup-нормы на $C(\Omega(A))$.

2) Из 3) следует, что $\|\hat{a}\| = r(a) \leqslant \|a\|$ для любого $a \in A$.

5) Следует из 3), замечания 5.2 и предложения 5.3. □

Ядро преобразования Гельфанда, описанное в п.5) предыдущей теоремы, носит специальное название:

Определение 5.8. Пусть A — унитальная коммутативная алгебра. Ее *радикалом Джекобсона* называется множество $\mathrm{Rad} A = \bigcap\{I : I \in \Omega(A)\}$. Алгебра A называется *полупростой*, если $\mathrm{Rad}\, A = \{0\}$.

Замечание 5.6. На самом деле, радикал Джекобсона можно определить для произвольных (неунитальных и некоммутативных) колец. Подробности см., например, в [16].

Таким образом, из предыдущей теоремы следует, что каждую полупростую унитальную банахову алгебру можно реализовать как алгебру, состоящую из непрерывных функций на некотором компакте — ее максимальном спектре.

В качестве упражнения докажите еще один результат об «автоматической непрерывности» (ср. следствие 2.2):

Упражнение 5.17. Пусть A и B — унитальные коммутативные банаховы алгебры, причем B полупроста. Тогда любой унитальный гомоморфизм из A в B непрерывен.

5.4. Преобразование Гельфанда: примеры

Посмотрим теперь, как выглядит спектр и преобразование Гельфанда для некоторых «классических» банаховых алгебр. Начнем с алгебры $C(X)$ непрерывных функций на компакте X. Для этого напомним вначале один стандартный факт из общей топологии, утверждающий, что на любом компакте имеется «достаточно много» непрерывных функций.

Теорема 5.3. *Пусть X — хаусдорфов компакт. Тогда для любых $x, y \in X$, $x \neq y$ найдется функция $f \in C(X)$ такая, что $f(x) \neq f(y)$.*

Доказывать эту теорему мы не будем; отметим, впрочем, что для метризуемых компактов она очевидна: достаточно взять функцию $z \mapsto \rho(x,z)$.

Свойство алгебры $C(X)$, указанное в теореме 5.3, обычно формулируют так: *алгебра $C(X)$ разделяет точки X.*

Предложение 5.5. *Пусть X — хаусдорфов компакт, $A = C(X)$ — алгебра непрерывных функций на X. Тогда отображение*

$$\delta_X : X \to \Omega(A), \quad x \mapsto \delta_{X,x}, \quad \delta_{X,x}(f) = f(x)$$

является гомеоморфизмом.

Доказательство. Утверждение об инъективности δ_X — это переформулировка теоремы 5.3. Сюръективность вытекает из следующей ключевой леммы:

Лемма 5.1 («о нулях»). *Пусть $I \subset C(X)$ — собственный идеал. Тогда существует точка $x \in X$ такая, что $f(x) = 0$ для любой $f \in I$.*

Доказательство. Предположим противное; тогда для любого $x \in X$ найдется $f_x \in I$ такая, что $f_x(x) \neq 0$. Ввиду непрерывности f_x, существует окрестность $U_x \ni x$, такая, что $f_x(y) \neq 0$ для любого $y \in U_x$. Пользуясь компактностью X, подберем $x_1, \ldots, x_n \in X$ так, чтобы $U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n} = X$, и положим $f = \sum_{i=1}^n |f_{x_i}|^2 = \sum_{i=1}^n \bar{f}_{x_i} f_{x_i}$. Тогда $f \in I$ и $f(x) \neq 0$ ни в одной точке $x \in X$. Таким образом, идеал I содержит обратимый элемент f и поэтому совпадает со всей алгеброй. Противоречие. □

Из леммы следует, в частности, что каждый максимальный идеал $I \subset A$ содержится в $\operatorname{Ker} \delta_{X,x}$ для некоторого $x \in X$, а, значит, совпадает с $\operatorname{Ker} \delta_{X,x}$ ввиду максимальности. Тем самым δ_X — сюръекция.

Непрерывность δ_X вытекает из упражнения 5.10. В самом деле, для любого $f \in A$ отображение $X \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \delta_X(x)(f)$ совпадает с f и потому непрерывно.

Итак, δ_X — непрерывная биекция между компактными пространствами X и $\Omega(A)$. Следовательно, δ_X — гомеоморфизм. □

Замечание 5.7. Обратите внимание на сходство предложения 5.5 и упражнения 5.4. На самом деле, довольно часто оказывается, что максимальный спектр той или иной алгебры функций на каком-либо множестве X совпадает с X. Из доказательства предложения 5.5 видно, что для этого нужно: во-первых, алгебра должна разделять точки X, а во-вторых, для нее должен быть справедлив аналог «леммы о нулях». Кстати, эта лемма справедлива и для алгебры многочленов $\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]$

от нескольких переменных; соответствующее утверждение — это слабая форма знаменитой *теоремы Гильберта о нулях* (Nullstellensatz). С ее доказательством (которое заметно сложнее, чем для $C(X)$ или $\mathbb{C}[t]$) можно познакомиться, например, по книжке [24].

Опишем теперь преобразование Гельфанда алгебры $C(X)$. Оказывается, при отождествлении X и $\Omega(C(X))$ оно становится тождественным отображением. Чтобы сформулировать это более строго, введем следующие обозначения.

Пусть X и Y — компактные топологические пространства, $\varphi\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Рассмотрим отображение

$$\varphi^\bullet\colon C(Y) \to C(X), \quad \varphi^\bullet(f) = f \circ \varphi \quad (f \in C(Y)).$$

Легко видеть, что $\varphi^\bullet$ — унитальный гомоморфизм нормы 1. Будем говорить, что гомоморфизм $\varphi^\bullet$ *индуцирован* отображением φ.

Вот некоторые простейшие свойства индуцированных гомоморфизмов:

Предложение 5.6. 1) *Если $\varphi\colon X \to Y$ и $\psi\colon Y \to Z$ — непрерывные отображения компактных пространств, то $(\psi\varphi)^\bullet = \varphi^\bullet\psi^\bullet$.*

2) $(\mathbf{1}_X)^\bullet = \mathbf{1}_{C(X)}$.

3) *Если φ — гомеоморфизм, то $\varphi^\bullet$ — изометрический изоморфизм.*

Доказательство. Прямая проверка (убедитесь!). □

С помощью понятия индуцированного гомоморфизма легко описать преобразование Гельфанда алгебры $C(X)$:

Предложение 5.7. *Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, $A = C(X)$ — алгебра непрерывных функций на X. Тогда преобразование Гельфанда $\Gamma_A\colon A \to C(\Omega(A))$ — изометрический изоморфизм, и обратным к нему является $\delta_X^\bullet$.*

Доказательство. Покажем, что композиция отображений

$$A \xrightarrow{\Gamma_A} C(\Omega(A)) \xrightarrow{\delta_X^\bullet} C(X) \tag{5.1}$$

— тождественное отображение $A = C(X)$ в себя. В самом деле,

$$[\delta_X^\bullet \Gamma_A(f)](x) = \Gamma_A(f)(\delta_{X,x}) = \delta_{X,x}(f) = f(x)$$

для всех $f \in C(X)$, $x \in X$. Следовательно, $\delta_X^\bullet \Gamma_A = \mathbf{1}_A$. Кроме того, δ_X — гомеоморфизм (см. предложение 5.5), поэтому $\delta_X^\bullet$ — изометрический изоморфизм (см. предложение 5.6). Отсюда следует, что Γ_A — тоже изометрический изоморфизм, и $\Gamma_A = (\delta_X^\bullet)^{-1}$. □

Замечание 5.8. Из доказательства видно, что если A — это какая-либо подалгебра в $A = C(X)$, снабженная не менее сильной нормой, чем равномерная, то композиция $\delta_X^\bullet \Gamma_A$ — это тождественное вложение A в $C(X)$. Поэтому, если δ_X — гомеоморфизм X на $\Omega(A)$ (а в прошлый раз мы выяснили, когда это так), то образ преобразования Гельфанда Γ_A алгебры A — это сама A.

Итак, с алгеброй $C(X)$ все ясно. Чтобы находить спектр и преобразование Гельфанда некоторых других банаховых алгебр, полезно выяснить, как понятие гельфандова спектра связано с понятием спектра элемента алгебры.

Упражнение 5.18. Пусть A — унитальная коммутативная банахова алгебра, порожденная (как банахова алгебра) элементом $a \in A$ (это означает, что A совпадает с замыканием линейной оболочки множества $\{1, a, a^2, \ldots\}$). Тогда множество значений функции $\hat{a}\colon \Omega(A) \to \mathbb{C}$ совпадает с $\sigma(a)$, и $\hat{a}$ осуществляет гомеоморфизм $\Omega(A)$ на $\sigma(a)$.

В качестве иллюстрации сделайте следующее

Упражнение 5.19. Опишите спектр и преобразование Гельфанда алгебр $C^n[a, b]$ и $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$.

Из приведенных примеров видно, что довольно часто спектр функциональной алгебры совпадает, с точностью до гомеоморфизма, с областью определения функций из алгебры (см. замечание 5.8). Но иногда область определения приходится немного «подправить»:

Упражнение 5.20. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, $\widehat{K}$ — объединение K и всех ограниченных компонент связности его дополнения. Тогда спектр алгебры $\mathscr{P}(K)$ (см. пример 2.12) совпадает с $\widehat{K}$.
Указание. Кроме некоторых стандартных фактов из комплексного анализа, можно воспользоваться, например, векторнозначной теоремой единственности (лемма 3.1).

В предыдущем примере область определения функций из алгебры пришлось расширить. А иногда ее бывает нужно «склеить»:

Упражнение 5.21. Пусть A — алгебра всех непрерывных 2π-периодических функций на прямой, снабженная sup-нормой. Опишите $\Omega(A)$.

Замечание 5.9. В §2.2 мы сделали следующее неформальное наблюдение: *спектр функции как элемента функциональной алгебры — это множество значений функции на «подправленной» области определения.* Теперь понятно, что это означает: если алгебра A состоит из функций на каком-нибудь множестве X, то спектр функции $a \in A$ совпадает с множеством значений функции $\hat{a}$ на гельфандовом спектре $\Omega(A)$ (см. теорему 5.2, п.4).

Замечание 5.10. Спектры алгебр вида $L^\infty(X,\mu)$ — это, как правило, нечто довольно экзотическое. Например, спектр алгебры ℓ^∞ (который, как нетрудно проверить, содержит множество $\mathbb{N}$ с дискретной топологией) совпадает с так называемой *стоун-чеховской компактификацией* $\beta\mathbb{N}$ пространства $\mathbb{N}$.

Еще одно полезное свойство преобразования Гельфанда — его согласованность с голоморфным исчислением:

Упражнение 5.22. Пусть A — унитальная коммутативная банахова алгебра, $a \in A$ — ее элемент, $U \subset \mathbb{C}$ — окрестность $\sigma(a)$ и $f \in \mathscr{O}(U)$ — голоморфная функция. Тогда $\widehat{f(a)} = f \circ \hat{a}$.

5.5. Категорная интерпретация преобразования Гельфанда

У понятий гельфандова спектра и преобразования Гельфанда есть одно чрезвычайно важное свойство: они носят *естественный* характер (причем не только в житейском смысле, но и в математическом). Для того, чтобы говорить о «естественных» математических явлениях, существует очень удобный язык — язык *категорий* и *функторов*.

Реклама. Понятия категории и функтора носят фундаментальный общематематический характер и относятся к разряду понятий из серии «Это должен знать каждый» (математик). Они помогают воспринимать математику как единую систему, а не как совокупность изолированных наук.

Определение 5.9. Говорят, что задана *категория* $\mathscr{C}$, если:

1) Задан класс $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ (элементы которого называются *объектами* $\mathscr{C}$);

2) Для каждой пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ задано множество $\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ (элементы которого называются *морфизмами* из X в Y). Вместо $\varphi \in \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ часто пишут $\varphi\colon X \to Y$ или $X \xrightarrow{\varphi} Y$;

3) Для каждых $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ задано отображение
$$\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(Y,Z) \times \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X,Y) \to \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X,Z).$$
Образ пары (ψ,φ) при этом отображении обозначается $\psi \circ \varphi$ и называется *композицией* ψ и φ.

При этом требуется, чтобы закон композиции морфизмов обладал следующими свойствами:

(i) Для любых морфизмов $X \xrightarrow{\varphi} Y$, $Y \xrightarrow{\psi} Z$ и $Z \xrightarrow{\chi} W$ выполнено соотношение $(\chi \circ \psi) \circ \varphi = \chi \circ (\psi \circ \varphi)$;

(ii) Для каждого $X \in \operatorname{Ob} \mathscr{C}$ существует морфизм $\mathbf{1}_X$ (называемый *локальной единицей* или *тождественным морфизмом*), такой, что для любых $\varphi\colon X \to Y$ и $\psi\colon Y \to X$ выполнено $\varphi \circ \mathbf{1}_X = \varphi$ и $\mathbf{1}_X \circ \psi = \psi$.

Определение 5.10. Морфизм $\psi\colon Y \to X$ называется *обратным* к $\varphi\colon X \to Y$ (и обозначается через φ^{-1}), если $\psi \circ \varphi = \mathbf{1}_X$ и $\varphi \circ \psi = \mathbf{1}_Y$. Морфизм, обладающий обратным, называется *изоморфизмом*.

Определение 5.11. Категория $\mathscr{A}$ называется *подкатегорией* категории $\mathscr{B}$, если $\operatorname{Ob} \mathscr{A} \subset \operatorname{Ob} \mathscr{B}$, для любых $X, Y \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$ выполнено $\mathbf{h}_{\mathscr{A}}(X, Y) \subset \mathbf{h}_{\mathscr{B}}(X, Y)$, и закон композиции (а также локальные единицы) в $\mathscr{A}$ — те же, что в $\mathscr{B}$. Если, к тому же, $\mathbf{h}_{\mathscr{A}}(X, Y) = \mathbf{h}_{\mathscr{B}}(X, Y)$ для любых $X, Y \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$, то говорят, что $\mathscr{A}$ — *полная* подкатегория.

Приведем несколько примеров.

Пример 5.1. Категория множеств $\mathcal{S}et$. Ее объекты — множества, морфизмы — отображения, композиция — обычная композиция отображений, локальная единица — тождественное отображение. Изоморфизмы в $\mathcal{S}et$ — это биективные отображения.

Многие важные категории состоят из «множеств с дополнительной структурой»; в качестве морфизмов при этом берутся те отображения, которые эту структуру сохраняют.

Пример 5.2. Категория групп $\mathscr{G}r$: объекты — всевозможные группы, морфизмы — гомоморфизмы групп.

Аналогичным образом строятся и другие алгебраические категории: категория колец, векторных пространств, ассоциативных алгебр, алгебр Ли... (список продолжите сами).

В топологии — свои категории:

Пример 5.3. Категория $\mathscr{T}op$: объекты — топологические пространства, морфизмы — непрерывные отображения. Особенно для нас важной будет ее полная подкатегория $\mathscr{C}omp$, объекты которой — компактные хаусдорфовы пространства. Отметим, что изоморфизмы как в $\mathscr{T}op$, так и в $\mathscr{C}omp$ — это в точности гомеоморфизмы.

Пример 5.4. Одна из основных категорий функционального анализа — категория $\mathscr{B}an$, объекты которой — банаховы пространства, а морфизмы — ограниченные (=непрерывные) линейные операторы. Изоморфизмы в $\mathscr{B}an$ — это *топологические изоморфизмы*, т.е. линейные операторы, являющиеся гомеоморфизмами (ввиду теоремы Банаха, это то же самое, что биективные ограниченные операторы).

Пример 5.5. Наряду с $\mathscr{B}an$, удобно также рассматривать ее (неполную) подкатегорию $\mathscr{B}an_1$, объекты которой — те же, что и в $\mathscr{B}an$, а морфизмы — линейные *сжатия*, т.е. линейные операторы, норма которых не превосходит 1. Изоморфизмы в $\mathscr{B}an_1$ — это *изометрические изоморфизмы*, т.е. биективные линейные операторы, сохраняющие норму.

Пример 5.6. Банаховы алгебры и их непрерывные гомоморфизмы также образуют категорию, обозначаемую через $\mathscr{B}\mathscr{A}$. Ее подкатегорию, состоящую из унитальных коммутативных банаховых алгебр и непрерывных унитальных гомоморфизмов, мы будем обозначать через $\mathscr{C}\mathscr{B}\mathscr{A}$.

Пример 5.7. Приведем теперь пример категории, не являющейся категорией «множеств со структурой». Пусть $\mathscr{C}$ — произвольная категория. *Эндоморфизмом* объекта $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ называется произвольный морфизм $X \to X$. Категория эндоморфизмов $\mathscr{E}nd(\mathscr{C})$ определяется следующим образом: ее объекты — это пары (X, φ), где $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ и $\varphi \in \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X, X)$, а морфизм из (X, φ) в (Y, ψ) — это такой морфизм $u \colon X \to Y$ в $\mathscr{C}$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, "\psi"] & Y \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

коммутативна. Как нетрудно проверить, диаграмма (5.2) задает изоморфизм в $\mathscr{E}nd(\mathscr{C})$ тогда и только тогда, когда u — изоморфизм в $\mathscr{C}$. В этом случае говорят, что эндоморфизмы φ и ψ *подобны*. В частности, для $\mathscr{C} = \mathscr{B}an$ мы получаем отношение подобия линейных операторов, а для $\mathscr{C} = \mathscr{B}an_1$ — их изометрическую эквивалентность (см. определение 3.2).

Пример 5.8. Для каждой категории $\mathscr{C}$ ее *дуальная категория* $\mathscr{C}^\circ$ определяется так: $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}^\circ = \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ и $\mathbf{h}_{\mathscr{C}^\circ}(X, Y) = \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(Y, X)$. Композиция морфизмов в $\mathscr{C}^\circ$ — это композиция морфизмов в $\mathscr{C}$, взятых в обратном порядке.

В разных областях математики часто возникает понятие «индуцированного отображения». Это происходит в тех ситуациях, когда некоторая общая конструкция определена не только на объектах, но и на морфизмах между ними. Формальное определение таково.

Определение 5.12. Пусть $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ — категории. Говорят, что задан *ковариантный функтор* $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, если:

1) Каждому объекту $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ сопоставлен объект $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$;

2) Для каждых $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ задано отображение $F\colon \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X,Y) \to \to \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(F(X), F(Y))$, такое, что

   (i) $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ для любых $\psi\colon X \to Y$ и $\varphi\colon Y \to Z$;

   (ii) $F(\mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_{F(X)}$ для любого X.

Иногда бывает так, что «индуцированное отображение» $F(\varphi)$ смотрит в противоположном направлении:

Определение 5.13. *Контравариантный функтор* из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}$ — это ковариантный функтор из дуальной категории $\mathscr{C}^\circ$ в $\mathscr{D}$.

Чтобы получить прямое определение, нужно в п. 2) из определения ковариантного функтора заменить фигурирующее там отображение на отображение $\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X,Y) \to \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(F(Y), F(X))$, а условие (i) заменить на $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$.

Вот простейшее, но очень важное свойство функторов:

Предложение 5.8. *Если $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ — функтор (ковариантный или контравариантный), а φ — изоморфизм в $\mathscr{C}$, то $F(\varphi)$ — изоморфизм в $\mathscr{D}$.*

Функторы встречаются в математике буквально на каждом шагу. Довольно часто взаимосвязи, существующие между различными областями математики, выражаются при помощи того или иного функтора; при этом свойство функторов сохранять изоморфизмы (см. предыдущее предложение) дает удобный способ сводить задачи из одной области математики к задачам из другой области. Это широко используется, например, в алгебраической топологии, которая изучает топологические пространства при помощи разнообразных функторов, действующих из топологических категорий в алгебраические. Более подробно об этом написано во введении к книге [22].

Из-за недостатка времени и места мы не будем задерживаться на многочисленных примерах функторов (см. литературные указания в конце главы). Приведем лишь несколько примеров, необходимых нам для дальнейшего.

Пример 5.9. Контравариантный *функтор сопряжения* $*\colon \mathscr{B}an \to \mathscr{B}an$ сопоставляет каждому банахову пространству E его сопряженное E^*, а каждому ограниченному оператору $T\colon E \to F$ — сопряженный оператор $T^*\colon F^* \to E^*$. Этот же функтор можно рассматривать как функтор из $\mathscr{B}an_1$ в $\mathscr{B}an_1$.

А теперь опишем два функтора, имеющие непосредственное отношение к коммутативным банаховым алгебрам. Первый из них уже встречался нам в §5.4.

Пример 5.10. Контравариантный функтор $C\colon \mathscr{C}omp \to \mathscr{CBA}$ сопоставляет каждому компакту X банахову алгебру $C(X)$, а непрерывному отображению $\varphi\colon X \to Y$ — гомоморфизм $\varphi^\bullet\colon C(Y) \to C(X)$, $f \mapsto f \circ \varphi$ (см. предложение 5.6).

Пример 5.11. Контравариантный *функтор спектра* $\Omega\colon \mathscr{CBA} \to \mathscr{C}omp$ сопоставляет каждой унитальной коммутативной банаховой алгебре A ее гельфандов спектр $\Omega(A)$, а каждому унитальному непрерывному гомоморфизму $\psi\colon A \to B$ — непрерывное отображение $\Omega(\psi)\colon \Omega(B) \to \Omega(A)$, переводящее характер $\chi \in \Omega(B)$ в характер $\chi \circ \psi \in \Omega(A)$. Иными словами, $\Omega(\psi)$ — это просто ограничение сопряженного оператора $\psi^*\colon B^* \to A^*$ на $\Omega(B)$.

Упражнение 5.23. Как $\Omega(\psi)$ действует на максимальные идеалы?

Итак, у нас есть два функтора C и Ω, действующие во встречных направлениях. Мы уже знаем (см. предложение 5.5), что если подействовать на какой-нибудь компакт X функтором C, а потом применить Ω, то получится, с точностью до гомеоморфизма, исходный компакт X. На самом деле, можно сказать больше: гомеоморфизмы $X \cong \Omega(C(X))$, рассмотренные для всевозможных X, согласованы друг с другом. Чтобы сформулировать это более строго, введем еще одно важное понятие.

Пусть $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ — категории и $F, G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ — ковариантные функторы.

Определение 5.14. *Естественное преобразование* (или, по-другому, *функторный морфизм*) $\alpha\colon F \to G$ — это семейство морфизмов $\alpha_X\colon F(X) \to G(X)$ в $\mathscr{D}$, заданных для каждого $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, такое, что для любого морфизма $\varphi\colon X \to Y$ в $\mathscr{C}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\varphi)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Если α_X — изоморфизм для любого $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, то α называется *естественной эквивалентностью* (или *функторным изоморфизмом*).

Пример 5.12. Рассмотрим два ковариантных функтора, действующие в категории $\mathscr{B}an$ банаховых пространств: тождественный функтор $\mathbf{1}_{\mathscr{B}an}$ и функтор «двойного сопряжения» $**\colon \mathscr{B}an \to \mathscr{B}an$, определяемый как композиция функтора сопряжения (см. пример 5.9) с самим собой. Для каждого банахова пространства E рассмотрим каноническое вложение $i_E\colon E \to E^{**}$. Нетрудно проверить (проверьте!), что семейство

$$\left\{i_E\colon E \to E^{**} \,:\, E \in \mathrm{Ob}(\mathscr{B}an)\right\}$$

— морфизм функторов $\mathbf{1}_{\mathscr{B}an} \to **$. Если ограничить наши функторы на полную подкатегорию $\mathscr{R}\mathscr{B}an$, состоящую из рефлексивных пространств, то мы получаем естественную эквивалентность между тождественным функтором и функтором «двойного сопряжения». (Это объясняет, почему естественный изоморфизм между конечномерным линейным пространством и его вторым сопряженным, о котором обычно рассказывают в курсе линейной алгебры, называется «естественным»).

Замечание 5.11. Интересно, что язык категорий и функторов был придуман специально для того, чтобы ввести понятие естественной эквивалентности, т.е. чтобы математически строго описать многочисленные ситуации, когда «что-то естественно изоморфно чему-то». Все эти понятия (категория, функтор, естественное преобразование, естественная эквивалентность...) ввели С. Эйленберг и С. Маклейн в 1945 г. (см. [38]).

А теперь вернемся к функторам C и Ω.

Упражнение 5.24. Семейство гомеоморфизмов

$$\left\{\delta_X\colon X \to \Omega(C(X)) : X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}omp)\right\}$$

является естественной эквивалентностью тождественного функтора $\mathbf{1}_{\mathscr{C}omp}$ и функтора $\Omega \circ C\colon \mathscr{C}omp \to \mathscr{C}omp$.

Упражнение 5.25. Семейство гомоморфизмов
$$\left\{\Gamma_A\colon A \to C(\Omega(A)) : A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{CBA})\right\}$$
— естественное преобразование из функтора $\mathbf{1}_{\mathscr{CBA}}$ в функтор $C \circ \Omega\colon \mathscr{CBA} \to \mathscr{CBA}$.

Можно пойти еще дальше:

Упражнение 5.26*. Для каждой $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{CBA})$ и каждого $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}omp)$ существует биекция $\mathbf{h}_{\mathscr{C}omp}(X, \Omega(A)) \cong \mathbf{h}_{\mathscr{CBA}}(A, C(X))$. Эта биекция естественна по A и X (придайте строгий смысл последней фразе и докажите).

Замечание 5.12. Свойство функторов Ω и C, указанное в предыдущем упражнении, означает, что эти функторы *сопряжены* друг другу.

Литературные указания

Базовая информация о преобразовании Гельфанда содержится во многих учебниках по банаховым алгебрам и теории операторов (см. литературные указания к главе 2). Мы следовали в основном книге [29]; в частности, оттуда взята категорная интерпретация преобразования Гельфанда. Теорема 5.3 доказана, например, в книге Дж. Келли [13]. По поводу дальнейшей информации о коммутативных банаховых алгебрах см. [4, 39, 21] и в особенности [5].

Наиболее полное руководство по теории категорий — недавно переведенная книга С. Маклейна [17]; см. также руководство И. Букура и А. Деляну [3]. Одно из лучших введений, снабженное большим количеством примеров — вторая глава книги С. И. Гельфанда и Ю. И. Манина [7], а также добавление к лекциям Ю. И. Манина [18]. О категориях, типичных для функционального анализа, см. [30]. Основные сведения о категориях и функторах есть также в любой книге по алгебраической топологии.

По поводу слабой и слабой* топологии см. [30] или какую-либо из книг о топологических векторных пространствах (см. литературные указания к главе 4).

ДЛЯ ЗАМЕТОК

НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. Ю. Пирковский

Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов

Часть II

Москва
2005

П33

Пирковский А. Ю.

П33 Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов. Часть II. — М: 2005. — 92 с.

Книга представляет собой записки семестрового курса лекций по спектральной теории, прочитанного автором в Независимом московском университете в весеннем семестре 2003 г. Ее можно рассматривать как дополнение к стандартному университетскому курсу функционального анализа. Особое внимание уделяется построению функциональных исчислений (от голоморфного до L^∞-исчисления) и доказательству спектральной теоремы в ее различных формулировках. Включено также изложение теории кратности в терминах измеримых гильбертовых расслоений. Для книги характерен алгебраический подход, при котором линейные операторы трактуются как представления функциональных алгебр.

Для студентов и аспирантов математических и физических специальностей.

Алексей Юльевич Пирковский

Спектральная теория и функциональные исчисления
для линейных операторов

Часть II

6. C^*-АЛГЕБРЫ И НЕПРЕРЫВНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Теперь мы уже знаем достаточно о коммутативных банаховых алгебрах, и можем вернуться к нашему разговору о функциональном исчислении от ограниченного оператора. Наша следующая цель — построить *непрерывное* функциональное исчисление, т.е. научиться применять к оператору непрерывные функции, определенные на его спектре. На примерах мы убедились, что это возможно не всегда: произвольный ограниченный оператор может не обладать даже гладким исчислением (а уж непрерывным — и подавно). Тем не менее, существует важный класс операторов, к которым можно применять непрерывные (и даже некоторые разрывные) функции. Это — так называемые *нормальные* операторы в гильбертовом пространстве, к изучению которых мы и переходим.

6.1. Операторы в гильбертовом пространстве и C^*-алгебры

Напоминание 6.1. Пусть H — гильбертово пространство. Существует каноническое отображение

$$J_H : H \to H^*,\ J_H(y) = f_y, \quad \text{где } f_y(x) = \langle x, y\rangle \text{ для всех } x \in H,$$

которое антилинейно и, ввиду теоремы Рисса, биективно и изометрично. Пусть теперь H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, $T \in \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ — ограниченный оператор, $T^* \in \mathscr{B}(H_2^*, H_1^*)$ — его сопряженный. *Эрмитово сопряженным* к T называется оператор $T^+ : H_2 \to \to H_1$, определяемый при помощи коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
H_1^* & H_2^* \arrow[l, "T^*"'] \\
H_1 \arrow[u, "J_{H_1}"] & H_2 \arrow[l, "T^+"] \arrow[u, "J_{H_2}"']
\end{tikzcd}$$

Иначе говоря, $T^+ = J_{H_1}^{-1} T^* J_{H_2}$. Оператор T^+ линеен, ограничен, и $\|T^+\| = \|T\|$. Эквивалентным способом T^+ может быть определен как единственное отображение из H_2 в H_1, удовлетворяющее тождеству $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^+ y\rangle$ для всех $x \in H_1$, $y \in H_2$.

В дальнейшем, говоря об операторах между гильбертовыми пространствами, вместо T^+ мы будем (как это обычно и делается) писать T^* и называть этот оператор *сопряженным* к T (опуская слово «эрмитово»). В оставшейся части лекций «обычные» сопряженные операторы нам больше не встретятся.

Рассматривая операторы, действующие в каком-то одном гильбертовом пространстве H, мы получаем операцию $*\colon \mathscr{B}(H)\to\mathscr{B}(H), T\mapsto T^*$ на алгебре $\mathscr{B}(H)$. Посмотрим, какими свойствами она обладает.

Предложение 6.1. *Пусть $S,T\in\mathscr{B}(H)$ и $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$. Тогда*

1) $(\lambda S+\mu T)^*=\bar\lambda S^*+\bar\mu T^*$;
2) $(ST)^*=T^*S^*$;
3) $T^{**}=T$;
4) $\|T^*\|=\|T\|$;
5) $\|T^*T\|=\|T\|^2$.

Доказательство. Свойство 4) уже упоминалось выше, а доказательство 1)–3) — простое упражнение. Докажем 5). С одной стороны, $\|T^*T\|\leqslant\|T^*\|\|T\|=\|T\|^2$ ввиду 4). С другой стороны,

$$\|Tx\|^2=\langle Tx,Tx\rangle=\langle T^*Tx,x\rangle\leqslant\|T^*Tx\|\|x\|\leqslant\|T^*T\|\|x\|^2$$

для всех $x\in H$. Отсюда следует противоположное неравенство. □

Эти свойства операции «звездочка» служат мотивировкой для следующего определения.

Определение 6.1. Пусть A — алгебра. Отображение $*\colon A\to A$, $a\mapsto a^*$ называется *инволюцией*, если оно обладает свойствами 1)–3) из предложения 6.1. Алгебра, снабженная инволюцией, называется *инволютивной алгеброй. Инволютивная банахова алгебра* — это банахова алгебра, снабженная инволюцией, обладающей свойством $\|a^*\|=\|a\|$ для всех $a\in A$. *C^*-алгебра* — это инволютивная банахова алгебра, в которой выполняется тождество $\|a^*a\|=\|a\|^2$ $(a\in A)$. Само это тождество называется *C^*-тождеством.*

Сразу же введем отображения, уважающие инволюцию.

Определение 6.2. Гомоморфизм $\varphi\colon A\to B$ между инволютивными алгебрами называется *инволютивным* (или *$*$-гомоморфизмом*), если $\varphi(a^*)=\varphi(a)^*$ для всех $a\in A$.

Ясно, что класс всех инволютивных (инволютивных банаховых, C^*-) алгебр и инволютивных (инволютивных ограниченных) гомоморфизмов образует категорию.

Вот несколько примеров.

Пример 6.1. Поле $\mathbb{C}$ становится C^*-алгеброй, если в качестве инволюции взять комплексное сопряжение.

Пример 6.2. Как следует из предложения 6.1, $\mathscr{B}(H)$ — C^*-алгебра.

Пример 6.3. Пусть X — хаусдорфов компакт. Определим инволюцию на $C(X)$ по формуле $f^*(x) = \overline{f(x)}$ $(x \in X)$. Легко видеть, что $C(X)$ становится C^*-алгеброй.

Пример 6.4. Аналогичным образом, если $(X, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство с мерой, то алгебра $B_{\mathscr{A}}(X)$ $\mathscr{A}$-измеримых ограниченных функций и алгебра $L^\infty(X, \mu)$ являются C^*-алгебрами относительно инволюции $f^*(x) = \overline{f(x)}$ $(x \in X)$.

Пример 6.5. Алгебра $C^n[a, b]$ — инволютивная банахова алгебра относительно инволюции $f^*(x) = \overline{f(x)}$ $(x \in [a, b])$.

Пример 6.6. Алгебра $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$ — инволютивная банахова алгебра относительно инволюции $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ $(z \in \overline{\mathbb{D}})$.

Упражнение 6.1. Если $n \geqslant 1$, то

1) $C^n[a, b]$ не является C^*-алгеброй;

2) $C^n[a, b]$ не изоморфна никакой C^*-алгебре как инволютивная банахова алгебра (т.е. не существует непрерывного биективного $*$-изоморфизма $C^n[a, b]$ ни на какую C^*-алгебру A);

3) $C^n[a, b]$ не изоморфна никакой C^*-алгебре как банахова алгебра;

4) $C^n[a, b]$ не изоморфна никакой C^*-алгебре как алгебра;

5) то же самое верно и для $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$.

Приведем теперь типичный пример $*$-гомоморфизма между C^*-алгебрами.

Пример 6.7. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть $H = L^2(X, \mu)$. Отображение $\varphi \colon L^\infty(X, \mu) \to \mathscr{B}(H)$, переводящее $f \in L^\infty(X, \mu)$ в оператор умножения $M_f \in \mathscr{B}(H)$, является унитальным изометрическим $*$-гомоморфизмом. В самом деле, соотношение $M_f^* = M_{\bar{f}}$ легко проверяется (проверьте!), а остальное следует из упр. 3.2.

Таким образом, алгебра $L^\infty(X, \mu)$ изометрически вкладывается (с сохранением инволюции) в алгебру $\mathscr{B}(H)$. Оказывается, то же самое верно для любой C^*-алгебры:

Теорема 6.1 (2-я теорема Гельфанда–Наймарка). *Для любой C^*-алгебры A существует гильбертово пространство H и изометрический $*$-гомоморфизм $A \to \mathscr{B}(H)$.*

Мы не будем доказывать эту теорему, поскольку это увело бы нас в сторону от нашей основной темы и потребовало бы много времени, но все же знать о ней стоит.

Пусть теперь A — инволютивная унитальная алгебра.

Определение 6.3. Элемент $a \in A$ называется *самосопряженным*, если $a^* = a$. Множество всех самосопряженных элементов в A обозначается A_{sa}.

Следующее предложение показывает, что самосопряженные элементы играют роль «действительных чисел»:

Предложение 6.2. *Для любого $a \in A$ существует единственная пара самосопряженных элементов $b, c \in A_{sa}$, таких, что $a = b + ic$. При этом $a = \dfrac{1}{2}(a + a^*)$, $b = \dfrac{1}{2i}(a - a^*)$.*

Доказательство. Прямая проверка (убедитесь!). □

Определение 6.4. Элемент $u \in A$ называется *унитарным*, если $uu^* = u^*u = 1$ (т.е. если u обратим, и $u^* = u^{-1}$).

Определение 6.5. Элемент $a \in A$ называется *нормальным*, если $aa^* = a^*a$.

Отметим, что любой самосопряженный элемент и любой унитарный элемент нормален.

Определение 6.6. Элемент $p \in A$ называется *ортопроектором*, если $p^* = p^2 = p$.

Следующее упражнение объясняет геометрический смысл введенных понятий.

Упражнение 6.2. 1) Оператор $U \in \mathscr{B}(H)$ унитарен $\iff$ он биективен, и $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ для всех $x, y \in H$.

2) Оператор $P \in \mathscr{B}(H)$ — ортопроектор $\iff$ существует замкнутое линейное подпространство $H_0 \subset H$, такое, что $Px = x$ для всех $x \in H_0$ и $Px = 0$ для всех $x \in H_0^\perp$.

Упражнение 6.3. Операторы сдвига на группах (см. пример 3.4) в соответствующих L^2-пространствах унитарны.

Пример 6.8. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $f \in L^\infty(X, \mu)$, $M_f \in \mathscr{B}(L^2(X,\mu))$ — оператор умножения на f. Из соотношения $M_f^* = M_{\bar f}$ (см. пример 6.7) легко следует, что

1) M_f нормален;

2) M_f самосопряжен $\iff$ $f(x) \in \mathbb{R}$ для п.в. $x \in X$;

3) M_f унитарен $\iff$ $f(x) \in \mathbb{T}$ для п.в. $x \in X$;
4) M_f — ортопроектор $\iff$ $f(x) \in \{0, 1\}$ для п.в. $x \in X$.

Замечание 6.1. Вскоре мы увидим, что M_f — это больше чем просто пример нормального оператора; окажется, что любой нормальный оператор в гильбертовом пространстве изометрически эквивалентен некоторому M_f (для подходящих (X, μ) и f).

Упражнение 6.4. Исследуйте, какие из операторов, упоминавшихся в главе 3, нормальны, а какие — нет.

6.2. Спектры элементов C^*-алгебр. Первая теорема Гельфанда–Наймарка

Наша ближайшая цель — доказать первую теорему Гельфанда–Наймарка, которая, говоря неформально, утверждает, что *“коммутативные унитальные C^*-алгебры — это то же самое, что компактные топологические пространства”*. Попутно мы установим некоторые полезные спектральные свойства элементов C^*-алгебр, которые пригодятся нам впоследствии.

Предложение 6.3. *Пусть A — унитальная инволютивная алгебра, $a \in A$ — ее элемент. Тогда*
1) *a обратим $\iff$ a^* обратим; при этом $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.*
2) *$\sigma(a) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\}$.*

Доказательство. Упражнение. □

Предложение 6.4. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $u \in A$ — унитарный элемент. Тогда $\|u\| = 1$, и $\sigma(u) \subset \mathbb{T}$.*

Доказательство. Поскольку $\|u\|^2 = \|u^* u\| = \|1\| = 1$, то и $\|u\| = 1$. Поэтому, если $\lambda \in \sigma(u)$, то $|\lambda| \leqslant 1$ (см. теорему 2.2). С другой стороны, $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1})$ (см. упр. 2.21). Но u^{-1} тоже унитарен, поэтому и $|\lambda^{-1}| \leqslant 1$. Значит, $|\lambda| = 1$, как и требовалось. □

Упражнение 6.5. Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $p \in A$ — ортопроектор. Найдите $\|p\|$ и $\sigma(p)$.

Предложение 6.5. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $a \in A$ — самосопряженный элемент. Тогда e^{ia} унитарен.*

Для доказательства нам понадобится следующий несложный факт:

Упражнение 6.6. Пусть A – унитальная банахова алгебра.
1) Если $a, b \in A$ коммутируют, то $e^{a+b} = e^a e^b$.

2) $(e^a)^{-1} = e^{-a}$ для любого $a \in A$.

Доказательство предложения. С учетом предыдущего упражнения,

$$(e^{ia})^* = \sum_n \frac{((ia)^*)^n}{n!} = \sum_n \frac{(-ia)^n}{n!} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}. \qquad \square$$

Предложение 6.6. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $a \in A$ — самосопряженный элемент. Тогда $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство. Если $\lambda \in \sigma(a)$, то $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{ia})$ по теореме об отображении спектра. Из предыдущих двух предложений следует, что $|e^{i\lambda}| = 1$, а это возможно только при $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Предложение 6.7. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра. Тогда каждый ее характер $\chi\colon A \to \mathbb{C}$ — $*$-гомоморфизм.*

Доказательство. Пусть вначале $a \in A_{sa}$. Тогда $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$, поэтому и $\sigma(\chi(a)) \subset \mathbb{R}$, т.е. $\chi(a) \in \mathbb{R}$. Если $a \in A$ произволен, то $a = b + ic$, где $b, c \in A_{sa}$ (см. предложение 6.2). Поэтому $\chi(b), \chi(c) \in \mathbb{R}$, и $\chi(a^*) = \chi(b - ic) = \chi(b) - i\chi(c) = \overline{(\chi(b) + i\chi(c))} = \overline{\chi(a)}$, как и требовалось. $\square$

Предложение 6.8. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $a \in A$ — нормальный элемент. Тогда $\|a\| = r(a)$.*

Доказательство. Для любого $b \in A_{sa}$ имеем $\|b\|^2 = \|b^2\|$. Применяя это к элементу $b = a^*a$ и пользуясь нормальностью a, получаем

$$\|a\|^4 = \|a^*a\|^2 = \|(a^*a)^2\| = \|(a^2)^*a^2\| = \|a^2\|^2.$$

Следовательно, $\|a\|^2 = \|a^2\|$. По индукции отсюда легко выводится, что $\|a\|^{2^n} = \|a^{2^n}\|$ для любого n. Поэтому $r(a) = \lim_n \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a\|$. $\square$

Упражнение 6.7. Какие из предыдущих предложений сохраняют силу для произвольных унитальных инволютивных банаховых алгебр?

Теперь у нас все готово для доказательства первой теоремы Гельфанда–Наймарка. Еще один стандартный факт, которым мы будем пользоваться — это теорема Стоуна–Вейерштрасса. Приведем ее формулировку (без доказательства).

Теорема 6.2 (Стоун–Вейерштрасс). *Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, $B \subset C(X)$ — подалгебра со следующими свойствами:*

1) $1 \in B$;
2) *если $f \in B$, то и $\bar{f} \in B$;*

3) B разделяет точки X (т.е. для любых $x, y \in X$, $x \neq y$ существует $f \in B$ такая, что $f(x) \neq f(y)$).

Тогда B плотна в $C(X)$.

Теорема 6.3 (1-ая теорема Гельфанда–Наймарка). *Пусть A — унитальная коммутативная C^*-алгебра. Тогда преобразование Гельфанда $\Gamma_A : A \to C(\Omega(A))$ — изометрический $*$-изоморфизм.*

Доказательство. Для любого $a \in A$ и любого $x \in \Omega(A) = \mathscr{X}(A)$, с учетом предложения 6.7, имеем

$$\Gamma_A(a^*)(x) = x(a^*) = \overline{x(a)} = \overline{\Gamma_A(a)(x)} = \Gamma_A(a)^*(x).$$

Это означает, что Γ_A — $*$-гомоморфизм. Если $a \in A_{sa}$, то из предложения 6.8 и свойств преобразования Гельфанда следует, что $\|\Gamma_A(a)\| = r(a) = \|a\|$. Если же $a \in A$ произволен, то

$$\|\Gamma_A(a)\|^2 = \|\Gamma_A(a)^*\Gamma_A(a)\| = \|\Gamma_A(a^*a)\| = \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Следовательно, Γ_A изометрично и, в частности, имеет замкнутый образ. Наконец, легко видеть, что подалгебра $B = \operatorname{Im}\Gamma_A \subset C(\Omega(A))$ удовлетворяет условиям теоремы Стоуна–Вейерштрасса (проверьте!) и поэтому плотна в $C(\Omega(A))$. Дальше ясно. $\square$

Замечание 6.2. Итак, никаких других коммутативных унитальных C^*-алгебр, кроме алгебр вида $C(X)$, не бывает. А как же ℓ^∞? На самом деле, никакого противоречия здесь нет: ℓ^∞ изометрически изоморфна $C(X)$, где $X = \Omega(\ell^\infty) = \beta\mathbb{N}$ — стоун-чеховская компактификация $\mathbb{N}$ (см. замечание 5.10).

Таким образом, если мы договоримся отождествлять гомеоморфные компакты и изометрически $*$-изоморфные C^*-алгебры. то, говоря несколько нестрого, соответствие $X \leftrightarrow C(X)$ — это биекция между компактными пространствами и коммутативными унитальными C^*-алгебрами. Но на самом деле, можно сказать больше: это соответствие позволяет отождествить не только объекты, но и морфизмы соответствующих категорий. Такие ситуации встречаются в математике довольно часто, и для их описания существует специальный термин.

Определение 6.7. Пусть $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ — категории, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ — ковариантный функтор. Говорят, что F *осуществляет эквивалентность* (или *является эквивалентностью*) между $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$, если существует функтор $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ такой, что функтор $F \circ G$ изоморфен $\mathbf{1}_{\mathscr{D}}$, а $G \circ F$ изоморфен $\mathbf{1}_{\mathscr{C}}$. При этом G называется *квазиобратным* к F.

Если $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ — контравариантный функтор, то говорят, что он *осуществляет антиэквивалентность* $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$, если соответствующий ковариантный функтор $F\colon \mathscr{C}^\circ \to \mathscr{D}$ — эквивалентность.

Сформулируем теперь первую теорему Гельфанда–Наймарка в более полной и правильной форме. Обозначим через $C^*\mathscr{A}lg$ категорию унитальных C^*-алгебр и непрерывных унитальных $*$-гомоморфизмов, а через $CC^*\mathscr{A}lg$ — ее полную подкатегорию, состоящую из коммутативных унитальных C^*-алгебр.

Теорема 6.4 (1-ая теорема Гельфанда–Наймарка). *Функтор $C\colon \mathscr{C}omp \to CC^*\mathscr{A}lg$ является антиэквивалентностью категорий. Квазиобратным к нему служит функтор $\Omega\colon CC^*\mathscr{A}lg \to \mathscr{C}omp$. При этом $\delta\colon \mathbf{1}_{\mathscr{C}omp} \to \Omega \circ C$ и $\Gamma\colon \mathbf{1}_{CC^*\mathscr{A}lg} \to C \circ \Omega$ — функторные изоморфизмы.*

Доказательство. Следует из теоремы 6.3 и упражнений 5.24 и 5.25. □

На первый взгляд может показаться, что в этой формулировке мы потеряли часть информации: ведь $\Gamma_A\colon A \to C(\Omega(A))$ — это не просто непрерывный биективный $*$-изоморфизм, а еще и изометрия. На самом деле, как мы сейчас увидим, изоморфизм в $C^*\mathscr{A}lg$ (а, значит, и в $CC^*\mathscr{A}lg$) *автоматически* является изометрией.

Предложение 6.9. *Пусть A — инволютивная унитальная банахова алгебра, B — унитальная C^*-алгебра, $\varphi\colon A \to B$ — унитальный $*$-гомоморфизм. Тогда φ непрерывен, и $\|\varphi\| = 1$.*

Доказательство. Пусть вначале $a \in A_{sa}$; тогда $\varphi(a) \in B_{sa}$, поэтому $\|\varphi(a)\| = r(\varphi(a)) \leqslant r(a) \leqslant \|a\|$ (см. предложение 6.8). Если же $a \in A$ произволен, то, применяя только что доказанное неравенство к элементу a^*a, мы получаем

$$\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| = \|\varphi(a^*a)\| \leqslant \|a^*a\| \leqslant \|a^*\|\|a\| = \|a\|^2.$$

Следовательно, $\|\varphi(a)\| \leqslant \|a\|$ для любого a, т.е. $\|\varphi\| \leqslant 1$. Противоположное неравенство следует из того, что $\varphi(1) = 1$. □

Следствие 6.1. *Любой унитальный $*$-изоморфизм между унитальными C^*-алгебрами изометричен.*

Замечание 6.3. Неформальный смысл первой теоремы Гельфанда–Наймарка в том, что изучать компакты — это то же самое, что изучать унитальные коммутативные C^*-алгебры. Поэтому на произвольную (т.е. некоммутативную) унитальную C^*-алгебру можно смотреть как на «алгебру непрерывных функций на некоммутативном компактном пространстве» (или, выражаясь еще более вольно, как на «некоммутативное компактное пространство»). Идею рассматривать теорию C^*-алгебр как «некоммутативную топологию» первым систематически начал развивать А. Конн. Интересно, что такая точка зрения принесла (и продолжает приносить) большую пользу обеим наукам — как топологии, так и теории операторных алгебр. См. литературные указания в конце главы.

Вот еще одно полезное спектральное свойство C^*-алгебр, которое вскоре нам понадобится.

Теорема 6.5. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $B \subset A$ — замкнутая $*$-подалгебра, содержащая единицу A. Тогда $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$ для любого $b \in B$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что B — наполненная, т.е. что каждый элемент $b \in B$, обратимый в A, обратим и в B. Итак, пусть $b \in B \cap \mathrm{Inv}(A)$; тогда $b^*b \in B_{sa} \cap \mathrm{Inv}(A)$, поэтому $\sigma_B(b^*b) \subset \mathbb{R}$ (предложение 6.6). Значит, для любого $t \in \mathbb{R}$ элемент $b^*b + it1$ обратим в B. Рассмотрим теперь $(b^*b + it1)^{-1} \in B$ и $(b^*b)^{-1} \in A$ как элементы A. Устремляя t к нулю и пользуясь замкнутостью B, мы видим, что $(b^*b)^{-1} \in B$. Поэтому элемент $(b^*b)^{-1}b^* \in B$ — левый обратный для b. Проделав то же самое с элементом bb^*, мы получаем, что b обратим справа в B. Следовательно, $b \in \mathrm{Inv}(B)$, как и требовалось. □

6.3. Непрерывное исчисление: построение и свойства

А теперь, как и было обещано, мы докажем, что нормальные операторы в гильбертовом пространстве (а на самом деле — нормальные элементы любых C^*-алгебр) обладают непрерывным исчислением.

Пусть A — унитальная инволютивная банахова алгебра, $a \in A$ — ее нормальный элемент, $K \subset \mathbb{C}$ — компакт. Как и раньше, через $t \in C(K)$ обозначим функцию $t(z) = z$.

Определение 6.8. *Непрерывным исчислением от a на K* называется непрерывный унитальный $*$-гомоморфизм $\gamma_c \colon C(K) \to A$, такой, что $\gamma_c(t) = a$.

Предложение 6.10. *Если непрерывное исчисление от a на K существует, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $P \subset C(K)$ — унитальная подалгебра, порожденная функциями t и $\bar{t}$ (т.е. множество всех полиномов от t и $\bar{t}$). Из теоремы Стоуна–Вейерштрасса следует, что P плотна в $C(K)$; с другой стороны, γ_c однозначно определено на P. ☐

Упражнение 6.8. Если непрерывное исчисление от a на K существует, то $\sigma(a) \subset K$.

Если не налагать на A никаких условий, то непрерывного исчисления может и не существовать:

Упражнение 6.9. Приведите пример унитальной инволютивной банаховой алгебры A и нормального элемента $a \in A$, не обладающего непрерывным исчислением ни на каком компакте.

Теорема 6.6. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $a \in A$ — нормальный элемент. Тогда для любого компакта $K \subset \mathbb{C}$, содержащего $\sigma(a)$, существует единственное непрерывное исчисление $\gamma_c \colon C(K) \to A$ от a на K. Если $K = \sigma(a)$, то γ_c изометрично.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $K = \sigma(a)$ (почему?). Пусть $B \subset A$ — унитальная C^*-подалгебра, порожденная a (т.е. $B = \overline{\operatorname{span}}\{a^m(a^*)^n : m, n \in \mathbb{Z}_+\}$). Очевидно, B коммутативна. Пусть $\Omega = \Omega(B)$ — ее максимальный спектр. В силу первой теоремы Гельфанда–Наймарка, преобразование Гельфанда $\Gamma_B \colon B \to C(\Omega)$ — изометрический $*$-изоморфизм. Рассмотрим отображение $\varphi \colon \Omega \to \sigma_B(a)$, $\varphi(x) = \hat{a}(x)$ для всех $x \in \Omega$. Из свойств преобразования Гельфанда следует, что φ — сюръекция; кроме того, $\sigma_B(a) = \sigma(a)$ ввиду теоремы 6.5. Из сюръективности φ вытекает, что индуцированный гомоморфизм $\varphi^\bullet \colon C(\sigma(a)) \to C(\Omega)$, $f \mapsto f \circ \varphi$ изометричен. Определим теперь $\gamma_c \colon C(\sigma(a)) \to A$ как единственное отображение, делающее следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook] & A \\ C(\Omega) \arrow[u, "\Gamma_B^{-1}"] & C(\sigma(a)) \arrow[l, "\varphi^\bullet"'] \arrow[u, "\gamma_c"'] \end{tikzcd}$$

(здесь верхняя стрелка — вложение B в A). Из сказанного выше следует, что γ_c — изометрический $*$-гомоморфизм. Далее, для любого $x \in \Omega$ $\varphi^\bullet(t)(x) = t(\varphi(x)) = \hat{a}(x)$, поэтому $\gamma_c(t) = \Gamma_B^{-1}\varphi^\bullet(t) = a$. Следовательно, γ_c — непрерывное исчисление от a на $K = \sigma(a)$. ☐

Упражнение 6.10. На самом деле, отображение $\varphi\colon \Omega \to \sigma(a)$, участвующее в доказательстве теоремы, не просто сюръективно, а является гомеоморфизмом (ср. упр. 5.18). Поэтому $\varphi^\bullet\colon C(\sigma(a)) \to C(\Omega)$ — изометрический $*$-изоморфизм.

Теорему 6.6 можно переписать в следующем виде (ср. теоремы 2.7 и 4.3):

Теорема 6.7. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $K \subset \mathbb{C}$ — непустой компакт. Существуют канонические биекции*

$$\left\{ \begin{matrix} \textit{нормальные} \\ a \in A: \\ \sigma(a) \subset K \end{matrix} \right\} \rightleftarrows \left\{ \begin{matrix} \textit{унитальные} \\ *\textit{-гомоморфизмы} \\ C(K) \to A \end{matrix} \right\}$$

Здесь стрелка, действующая слева направо, сопоставляет элементу $a \in A$ его непрерывное исчисление на K, а стрелка, действующая справа налево, сопоставляет гомоморфизму $\pi\colon C(K) \to A$ элемент $\pi(t)$, где $t(z) = z$ для любого $z \in K$.

Итак, непрерывное исчисление построено. Посмотрим теперь на его свойства. Всюду далее A — унитальная C^*-алгебра, $a \in A$ — нормальный элемент.

Во-первых, непрерывное исчисление, как и следовало ожидать, согласовано с голоморфным:

Упражнение 6.11. Пусть γ_h и γ_c — голоморфное и непрерывное исчисления от a на $\sigma(a)$. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}(\sigma(a)) \arrow[d] \arrow[dr, "\gamma_h"] & \\ & A \\ C(\sigma(a)) \arrow[ur, "\gamma_c"'] & \end{tikzcd}$$

(здесь вертикальная стрелка — канонический «гомоморфизм ограничения», определяемый очевидным образом).

Упражнение 6.12. Сформулируйте и докажите согласованность непрерывных исчислений на разных компактах (ср. упр. 4.12).

Благодаря результатам двух последних упражнений, мы можем, когда удобно, вместо $\gamma_c(f)$ писать просто $f(a)$ для любой непрерывной функции f на любом компакте, содержащем $\sigma(a)$ (как мы и делали раньше для полиномиального, рационального и голоморфного исчислений).

Упражнение 6.13 (теорема об отображении спектра). Для любой $f \in C(\sigma(a))$ справедливо равенство $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.

Упражнение 6.14 (теорема о композиции). Если $f \in C(\sigma(a))$ и $g \in C(\sigma(f(a)))$, то $g(f(a)) = (g \circ f)(a)$.

Упражнение 6.15 (перестановочность с гомоморфизмами). Пусть $\varphi\colon A \to B$ — унитальный $*$-гомоморфизм C^*-алгебр. Тогда $\varphi(f(a)) = f(\varphi(a))$ для любой $f \in C(\sigma(a))$.

Следствие 6.2 (согласованность с преобразованием Гельфанда). *Если A коммутативна, то $\widehat{f(a)} = f \circ \hat{a}$ для любой $f \in C(\sigma(a))$.*

Доказательство. Достаточно применить результат предыдущего упражнения, взяв в качестве φ любой характер A. □

Как и в случае голоморфного исчисления (см. упр. 4.18), естественно спросить, верна ли теорема об отображении спектра для его частей. Впрочем, у спектра нормального оператора этих частей не так уж и много:

Упражнение 6.16. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор. Тогда

$$\sigma_r(T) = \varnothing, \quad \sigma_{ap}(T) = \sigma_{su}(T) = \sigma(T), \quad \sigma_p(T) = \sigma_{com}(T).$$

Указание. Вначале докажите следующее:

1) $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*T$ для любого $T \in \mathscr{B}(H)$.
2) Если T нормален, то $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$.

Упражнение 6.17. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор, $f \in C(\sigma(T))$. Верно ли, что $\sigma_p(f(T)) = f(\sigma_p(T))$? Тот же вопрос для σ_c.

Теперь разберитесь с «модельным примером» нормального оператора (ср. замечание 6.1).

Упражнение 6.18. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $f \in L^\infty(X, \mu)$. Опишите непрерывное исчисление от оператора умножения M_f, действующего в $L^2(X, \mu)$.

Интересно, что многое из того, что было только что доказано (или предложено в качестве упражнения), переносится на случай «нескольких переменных»:

Упражнение 6.19. *(“Научно-исследовательское”).* Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $a_1, \ldots, a_n \in A$ — попарно коммутирующие нормальные элементы. Придумайте определение совместного спектра $\sigma(a_1, \ldots, a_n)$ так, чтобы он был непустым компактом в $\mathbb{C}^n$ и для $n = 1$

превращался в обычный спектр элемента. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывном функциональном исчислении от $a_1, \ldots, a_n$ и теорему об отображении спектра.

Литературные указания

Одно из лучших введений в теорию C^*-алгебр, недавно переведенное на русский язык — книга Дж. Мерфи [20]. Более глубокие результаты о представлениях C^*-алгебр содержатся в монографии Ж. Диксмье [12]. См. также [29, 30, 26, 21]. В частности, в любой из этих книг (кроме [30]) можно найти доказательство второй теоремы Гельфанда–Наймарка (теорема 6.1). О физических приложениях операторных алгебр (в частности, C^*-алгебр) см. монографию У. Браттели и Д. Робинсона [2]. Теорема Стоуна–Вейерштрасса (теорема 6.2) доказана в [26] и [23].

С некоммутативной геометрией можно познакомиться по основополагающей книге А. Конна [34]; более доступные источники — книга Дж. Ланди [42] или лекции Н. Хигсона и Дж. Роу [41].

7. БОРЕЛЕВСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В предыдущей главе мы выяснили, что любой нормальный элемент унитальной C^*-алгебры обладает непрерывным исчислением на любом компакте в $\mathbb{C}$, содержащем его спектр. Наша очередная задача — продолжить непрерывное исчисление с алгебры непрерывных функций на более широкую алгебру, состоящую из всех ограниченных борелевских функций на этом компакте. В произвольной C^*-алгебре сделать это, вообще говоря, нельзя; тем не менее, мы покажем, что в нашей «главной» C^*-алгебре — алгебре $\mathscr{B}(H)$ — любой нормальный элемент обладает борелевским исчислением. Для этого нам понадобится некоторая подготовка. Для начала мы установим несколько общих фактов об операторах в гильбертовом пространстве.

7.1. Операторы и полуторалинейные формы

Пусть H — векторное пространство (как всегда, над $\mathbb{C}$).

Определение 7.1. Отображение $\varPhi\colon H \times H \to H$ называется *полуторалинейной формой*, если для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ и любых $x, y, z \in H$ выполнено

1) $\varPhi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\varPhi(x, z) + \mu\varPhi(y, z)$;
2) $\varPhi(x, \lambda y + \mu z) = \bar\lambda\varPhi(x, y) + \bar\mu\varPhi(x, z)$.

Полуторалинейная форма $\varPhi$ называется *эрмитовой*, если $\varPhi(x,y) = \overline{\varPhi(y, x)}$ для любых $x, y \in H$.

Отображение $H \to H$, $x \mapsto \varPhi(x, x)$ называется *квадратичной формой, ассоциированной с $\varPhi$*.

Следующая полезная формула показывает, что полуторалинейная форма полностью восстанавливается по своей квадратичной форме.

Упражнение 7.1. Если $\varPhi$ — полуторалинейная форма, то справедливо *тождество поляризации*

$$\varPhi(x, y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \varPhi(x + i^k y, x + i^k y).$$

Упражнение 7.2. Полуторалинейная форма $\varPhi$ эрмитова $\iff$ $\varPhi(x, x) \in \mathbb{R}$ для любого $x \in H$.

Пусть теперь H — гильбертово пространство. Каждому линейному (не обязательно ограниченному) оператору $T\colon H \to H$ сопоставим полуторалинейную форму $\varPhi_T$ на H по правилу $\varPhi_T(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ $(x,y \in H)$.

Как $\varPhi_T$, так и соответствующая ей квадратичная форма полностью определяют оператор:

Упражнение 7.3. Если $S, T\colon H \to H$ — линейные операторы, то $S = T \iff \varPhi_S = \varPhi_T \iff \langle Sx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle$ для всех $x \in H$.

Замечание 7.1. Обратите внимание, что над $\mathbb{R}$ это не так: достаточно рассмотреть поворот на 90° на плоскости.

Упражнение 7.4. 1) Оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ самосопряжен $\iff$ форма $\varPhi_T$ эрмитова $\iff \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ для всех $x \in H$.

2) $T \in \mathscr{B}(H)$ изометричен $\iff T^*T = \mathbf{1}$.

3) $U \in \mathscr{B}(H)$ унитарен $\iff$ он изометричен и сюръективен.

Замечание 7.2. Конечно, п. 2) и 3) из последнего упражнения справедливы и для операторов, действующих между двумя разными гильбертовыми пространствами. Напомним в этой связи об отношении изометрической эквивалентности операторов (см. главу 3). Поскольку изометрический изоморфизм гильбертовых пространств автоматически унитарен (т.е. сохраняет скалярные произведения), для операторов, действующих в гильбертовых пространствах, вместо термина «*изометрическая эквивалентность*» обычно употребляют термин «*унитарная эквивалентность*».

Мы уже видели, что такие свойства оператора, как «быть унитарным», «быть ортопроектором», «быть изометрией» могут быть определены как в геометрических терминах, так и в алгебраических. Вот еще два таких свойства:

Определение 7.2. 1) Оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ называется *коизометрией*, если $TT^* = \mathbf{1}$.

2) Оператор $V \in \mathscr{B}(H)$ называется *частичной изометрией*, если $(V^*V)^2 = V^*V$.

Упражнение 7.5. Дайте геометрическое определение коизометрии и частичной изометрии.

Итак, каждому оператору T в H соответствует полуторалинейная форма $\varPhi_T$. Посмотрим теперь, какие формы соответствуют ограниченным операторам.

Определение 7.3. Полуторалинейная форма $\varPhi$ на гильбертовом пространстве H называется *ограниченной*, если существует $C > 0$ такое, что $|\Phi(x,y)| \leqslant C\|x\|\|y\|$ для всех $x,y \in H$. Точная нижняя грань таких C называется *нормой* Φ и обозначается $\|\Phi\|$.

Нетрудно проверить, что так определенная норма действительно является нормой на пространстве всех ограниченных полуторалинейных форм на H. Впрочем, это будет легко следовать из доказанной ниже теоремы 7.1.

Пример 7.1. Легко видеть, что для любого ограниченного оператора T в H форма Φ_T ограничена, и $\|\Phi_T\| \leqslant \|T\|$.

Оказывается, других ограниченных полуторалинейных форм не бывает:

Теорема 7.1. *Отображение*

$$\mathscr{B}(H) \to \left\{ \begin{matrix} \textit{пространство полуторалинейных} \\ \textit{ограниченных форм на } H \end{matrix} \right\}, \qquad T \mapsto \Phi_T$$

— изометрический изоморфизм.

Доказательство. Инъективность отображения $T \mapsto \Phi_T$ следует из упражнения 7.3.

Пусть Φ — ограниченная полуторалинейная форма. Зафиксируем $y \in H$ и рассмотрим функционал $\Phi^y \colon H \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \Phi(x,y)$. Ясно, что $\Phi^y \in H^*$, и $\|\Phi^y\| \leqslant \|\Phi\|\|y\|$. Поэтому существует единственный вектор $S(y) \in H$, такой, что $\Phi(x,y) = \langle x, S(y)\rangle$ для любого $x \in H$. Из полуторалинейности Φ и скалярного произведения следует, что $S \colon H \to H$ — линейный оператор; кроме того, $\|S(y)\| = \|\Phi^y\| \leqslant \|\Phi\|\|y\|$ для любого $y \in H$, т.е. S ограничен, и $\|S\| \leqslant \|\Phi\|$. Положим $T = S^*$; тогда $\Phi = \Phi_T$, так что отображение $T \mapsto \Phi_T$ — сюръекция. Наконец, изометричность этого отображения сразу следует из цепочки неравенств $\|T\| = \|S\| \leqslant \|\Phi_T\| \leqslant \|T\|$. □

7.2. Комплексные меры

Для построения борелевского исчисления нам понадобятся некоторые факты из теории меры. Некоторые из них — совсем простые (и будут предложены в качестве упражнений); остальные мы приведем без доказательства.

Пусть X — множество, $\mathscr{A} \subset 2^X$ — σ-алгебра его подмножеств.

Определение 7.4. Отображение $\mu \colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ называется *комплексной мерой*, если

1) $\mu(\varnothing) = 0$;

2) $\mu(\bigsqcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ для попарно не пересекающихся $A_i \in \mathscr{A}$.

Если второе свойство выполнено и для счетных семейств, то μ называется *σ-аддитивной*.

Определение 7.5. Говорят, что мера μ имеет *ограниченную вариацию*, если существует $C > 0$ такое, что для любого конечного набора $\{A_i\}_{i=1}^n$ попарно не пересекающихся множеств из $\mathscr{A}$ выполнено $\sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| \leqslant C$.

Очевидно, любая неотрицательная мера имеет ограниченную вариацию.

Утверждение 7.1. *Любая σ-аддитивная мера имеет ограниченную вариацию.*

Определение 7.6. Пусть μ — мера ограниченной вариации на $\mathscr{A}$. Ее *вариацией* называется функция $|\mu| \colon \mathscr{A} \to [0, +\infty)$, заданная формулой

$$|\mu|(A) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| : A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i,\ A_i \in \mathscr{A}\Big\}.$$

Утверждение 7.2. *$|\mu|$ является мерой на $\mathscr{A}$.*

Обозначим через $\mathcal{M}_{\mathscr{A}}(X)$ множество всех комплексных мер ограниченной вариации на $\mathscr{A}$. Очевидно, $\mathcal{M}_{\mathscr{A}}(X)$ — векторное пространство.

Утверждение 7.3. *Функция $\mu \mapsto \|\mu\| = |\mu|(X)$ является нормой на $\mathcal{M}_{\mathscr{A}}(X)$. Относительно этой нормы $\mathcal{M}_{\mathscr{A}}(X)$ является банаховым пространством.*

Напомним (см. пример 2.10), что через $B_{\mathscr{A}}(X)$ мы обозначаем банахову алгебру всех ограниченных $\mathscr{A}$-измеримых функций на X. Для каждого подмножества $A \subset X$ через χ_A обозначим его характеристическую функцию (индикатор). Положим

$$S_{\mathscr{A}}(X) = \operatorname{span}\{\chi_A : A \in \mathscr{A}\} \subset B_{\mathscr{A}}(X).$$

Функции из $S_{\mathscr{A}}(X)$ будем называть *$\mathscr{A}$-простыми*. Легко убедиться (убедитесь), что $S_{\mathscr{A}}(X)$ — подалгебра в $B_{\mathscr{A}}(X)$.

Упражнение 7.6. $S_{\mathscr{A}}(X)$ плотно в $B_{\mathscr{A}}(X)$.

Упражнение 7.7. Для любой меры $\mu \in \mathcal{M}_{\mathscr{A}}(X)$ существует единственный функционал $I_\mu \in B_{\mathscr{A}}(X)^*$ такой, что $I_\mu(\chi_A) = \mu(A)$ для любого $A \in \mathscr{A}$.

Определение 7.7. Для любой $f \in B_{\mathscr{A}}(X)$ величина $I_\mu(f)$ называется *интегралом* f по мере μ и обозначается $\int_X f(x)\,d\mu(x)$.

Теорема 7.2 (Хильдебрандт, Канторович). *Отображение*
$$\mathcal{M}_{\mathscr{A}}(X) \to B_{\mathscr{A}}(X)^*, \qquad \mu \mapsto I_\mu$$
— изометрический изоморфизм банаховых пространств.

Пусть теперь X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\mathscr{A} = \mathscr{B}or(X)$ — σ-алгебра его борелевских подмножеств. В этом случае вместо $B_{\mathscr{A}}(X)$, $S_{\mathscr{A}}(X)$ и $\mathcal{M}_{\mathscr{A}}(X)$ мы будем писать $B(X)$, $S(X)$ и $\mathcal{M}(X)$ соответственно.

Определение 7.8. *Борелевская мера на* X — это комплексная мера на $\mathscr{B}or(X)$.

Определение 7.9. Борелевская мера μ на X называется *регулярной*, если для каждого $B \in \mathscr{B}or(X)$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдутся открытое множество $U \supset B$ и компакт $K \subset B$ такие, что $|\mu|(U \setminus K) < \varepsilon$.

Утверждение 7.4. *Регулярная борелевская мера на компакте σ-аддитивна.*

Замечание 7.3. Для метризуемых компактов верно и обратное: любая σ-аддитивная борелевская мера регулярна.

Обозначим через $M(X) \subset \mathcal{M}(X)$ подмножество, состоящее из регулярных мер.

Утверждение 7.5. *$M(X)$ — замкнутое векторное подпространство в $\mathcal{M}(X)$ (и, следовательно, является банаховым пространством).*

Вот ключевая теорема, которой мы в дальнейшем будем неоднократно пользоваться:

Теорема 7.3 (Рисс, Марков, Какутани). *Отображение*
$$M(X) \to C(X)^*, \qquad \mu \mapsto I_\mu$$
— изометрический изоморфизм банаховых пространств.

Замечание 7.4. Обозначим через $j_M \colon M(X) \to \mathcal{M}(X)$ и $j_C \colon C(X) \to \to B(X)$ тождественные вложения. С учетом теорем Хильдебрандта–Канторовича и Рисса–Маркова–Какутани, сопряженный оператор j_C^* действует из $\mathcal{M}(X)$ в $M(X)$. Можно показать, что $j_C^* \circ j_M = \mathbf{1}_{M(X)}$. Отсюда следует, что $M(X)$ — дополняемое подпространство в $\mathcal{M}(X)$, а j_C^* — проектор из $\mathcal{M}(X)$ на $M(X)$. (Этот проектор в некотором смысле «регуляризует» произвольную борелевскую меру ограниченной вариации.)

7.3. Слабо-мерная топология на $B(X)$

Пусть по-прежнему X — компактное хаусдорфово топологическое пространство. Каждой функции $f \in B(X)$ сопоставим функционал $F_f \in M(X)^*$, действующий по формуле $F_f(\mu) = \int_X f \, d\mu$. Полученное отображение $B(X) \to M(X)^*$ обозначим через $\varkappa$. Если отождествить $M(X)$ с $C(X)^*$, то легко видеть, что $\varkappa\colon B(X) \to C(X)^{**}$ — продолжение канонического вложения $i_{C(X)}\colon C(X) \hookrightarrow C(X)^{**}$. С другой стороны, мы можем отождествить $\mathcal{M}(X)$ с $B(X)^*$, и тогда $F_f \in M(X)^*$ — это ограничение на $M(X)$ функционала $i_{B(X)}(f) \in \mathcal{M}(X)^*$, где $i_{B(X)}\colon B(X) \hookrightarrow B(X)^{**} = \mathcal{M}(X)^*$ — каноническое вложение (см. рис.):

$$
\begin{tikzcd}
B(X) \arrow[r, "i_{B(X)}"] \arrow[drr, "\varkappa"] & B(X)^{**} \arrow[r, equal, "\sim"] & \mathcal{M}(X)^* \arrow[d, "j_M^*"] \\
C(X) \arrow[u, "j_C"] \arrow[r, "i_{C(X)}"'] & C(X)^{**} \arrow[r, equal, "\sim"] & M(X)^*
\end{tikzcd}
$$

Из сказанного следует, что $\|\varkappa(f)\| \leqslant \|f\|$ для любой $f \in B(X)$. На самом деле, можно сказать больше:

Упражнение 7.8. $\varkappa\colon B(X) \to M(X)^*$ — изометрия.
Указание. Примените $\varkappa(f)$ к мере, сосредоточенной в одной точке.

Упражнение 7.9. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» изометричности $\varkappa$:

"Для любой $f \in B(X)$ имеем $\varkappa(f) \in C(X)^{**}$, а $C(X)^{**}$ изометрически вкладывается в $B(X)^{**}$, поэтому $\varkappa(f)$ лежит в $B(X)^{**}$ и, очевидно, совпадает с образом f при каноническом вложении $B(X) \hookrightarrow B(X)^{**}$. Поскольку последнее изометрично, мы получаем $\|\varkappa(f)\| = \|f\|$."

Итак, $\varkappa$ инъективно отображает $B(X)$ в $M(X)^*$. Это позволяет дать следующее

Определение 7.10. *Слабо-мерной топологией* на $B(X)$ называется прообраз слабой* топологии $\sigma(M(X)^*, M(X))$ при вложении $\varkappa\colon B(X) \to M(X)^*$.

Слабо-мерную топологию на $B(X)$ мы будем обозначать символом wm. По определению, она задается семейством полунорм $\{\|\cdot\|_\mu : \mu \in \in M(X)\}$, где $\|f\|_\mu = |\int_X f\,d\mu|$.

Упражнение 7.10*. Последовательность $f_n \in B(X)$ сходится к $f \in B(X)$ в wm $\iff$ она равномерно ограничена и сходится к f поточечно.

Напомним, что для любого банахова пространства E образ E при каноническом вложении $i_E\colon E \to E^{**}$ замкнут в E^{**} по норме (и уж подавно не плотен там, если только E не рефлексивно). Однако в E^{**} есть и другая топология, а именно, $\sigma(E^{**}, E^*)$. Оказывается, верно следующее:

Упражнение 7.11. $\operatorname{Im} i_E$ плотен в E^{**} относительно топологии $\sigma(E^{**}, E^*)$.

Следовательно, $\operatorname{Im} i_E$ плотен и в любом «промежуточном» подпространстве $F \subset E^{**}$, его содержащем. В применении к $C(X)$ это дает следующее:

Следствие 7.1. *$C(X)$ плотно в $B(X)$ относительно слабо-мерной топологии.*

Напомним, что на $C(X)$ и на $B(X)$ есть инволюция, заданная формулой $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Относительно этой инволюции $C(X)$ и $B(X)$ являются инволютивными банаховыми алгебрами (и даже C^*-алгебрами; см. примеры 6.3 и 6.4).

Определение 7.11. Инволютивная полинормированная алгебра — это полинормированная алгебра, снабженная непрерывной инволюцией.

Предложение 7.1. *$(B(X), wm)$ — инволютивная полинормированная алгебра.*

Доказательство. Зафиксируем функцию $f \in B(X)$ и покажем, что оператор умножения $L_f\colon B(X) \to B(X)$, $g \mapsto fg$ непрерывен в слабо-мерной топологии. Для произвольной $\mu \in M(X)$ определим борелевскую меру $f \cdot \mu$ формулой $(f \cdot \mu)(A) = \int_A f\,d\mu$. Из регулярности μ и очевидной оценки $|(f \cdot \mu)(A)| \leqslant |\mu|(A)\|f\|_\infty$ следует регулярность $f \cdot \mu$. Далее, для любой простой $g \in S(X)$ мы имеем $\int_X fg\,d\mu = \int_X g\,d(f \cdot \mu)$. Поскольку обе части последнего равенства непрерывно зависят от $g \in B(X)$ (по равномерной норме), а $S(X)$ плотно в $B(X)$, мы видим, что это равенство выполнено и для любой $g \in B(X)$. Отсюда следует, что

$\|fg\|_\mu = \|g\|_{f\cdot\mu}$ для любой $g \in B(X)$, поэтому $L_f\colon g \mapsto fg$ непрерывен в слабо-мерной топологии (см. упр. 4.5). Следовательно, $(B(X), wm)$ — полинормированная алгебра. Непрерывность инволюции следует из равенства $\|f^*\|_\mu = \|f\|_{\bar\mu}$. □

Упражнение 7.12. Если X бесконечно, то умножение в $(B(X), wm)$ не является совместно непрерывным. С другой стороны, оно является секвенциально совместно непрерывным (т.е. если $f_n \to f$ и $g_n \to g$ в wm, то $f_n g_n \to fg$ в wm).

7.4. Слабо-операторная топология на $\mathscr{B}(H)$

Пусть H — гильбертово пространство. Для каждых $x, y \in H$ определим полунорму $\|\cdot\|_{x,y}$ на $\mathscr{B}(H)$, полагая $\|T\|_{x,y} = |\langle Tx, y\rangle|$ для каждого $T \in \mathscr{B}(H)$.

Определение 7.12. Топология на $\mathscr{B}(H)$, задаваемая системой полунорм $\{\|\cdot\|_{x,y} : x, y \in H\}$, называется *слабо-операторной топологией* и обозначается через wo.

Упражнение 7.13*. Обозначим через $\mathscr{F}(H)$ пространство всех ограниченных операторов в H с конечномерным образом. Постройте изоморфизм $(\mathscr{B}(H), wo)^* \cong \mathscr{F}(H)$.

Предложение 7.2. $(\mathscr{B}(H), wo)$ — *инволютивная полинормированная алгебра.*

Доказательство. Для любых $S, T \in \mathscr{B}(H)$ и любых $x, y \in H$ справедливы равенства $\|ST\|_{x,y} = |\langle STx, y\rangle| = \|S\|_{Tx,y}$. Отсюда следует, что оператор правого умножения $R_T\colon \mathscr{B}(H) \to \mathscr{B}(H)$, $S \mapsto ST$ непрерывен в слабо-операторной топологии. С другой стороны, $\|ST\|_{x,y} = |\langle Tx, S^*y\rangle| = \|T\|_{x,S^*y}$, поэтому и оператор левого умножения $L_S\colon \mathscr{B}(H) \to \mathscr{B}(H)$, $T \mapsto ST$ непрерывен в слабо-операторной топологии. Наконец, непрерывность инволюции вытекает из равенства $\|T^*\|_{x,y} = \|T\|_{y,x}$. □

Упражнение 7.14. Если H бесконечномерно, то умножение в $(\mathscr{B}(H), wo)$ не является совместно непрерывным.

Теперь, наконец, у нас все готово для построения борелевского исчисления от нормального оператора.

7.5. Борелевское исчисление: построение и свойства

Пусть H — гильбертово пространство, $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный ограниченный оператор, $K \subset \mathbb{C}$ — компактное подмножество. Как и раньше, через $t \in B(K)$ обозначим функцию $t(z) = z$ $(z \in K)$.

Определение 7.13. *Борелевское исчисление* от T на K — это непрерывный унитальный $*$-гомоморфизм $\gamma_b\colon (B(K), wm) \to (\mathscr{B}(H), wo)$, такой, что $\gamma_b(t) = T$.

Вот простейшие свойства борелевского исчисления:

Предложение 7.3. *Пусть борелевское исчисление от T на K существует. Тогда:*

1) *оно единственно;*
2) *$K \supset \sigma(T)$;*
3) *$\gamma_b|_{C(K)} = \gamma_c$ (т.е. борелевское исчисление продолжает непрерывное);*
4) *$\gamma_b\colon B(K) \to \mathscr{B}(H)$ непрерывно по норме, и $\|\gamma_b\| = 1$.*

Доказательство. 4) Следует из того, что γ_b — $*$-гомоморфизм между C^*-алгебрами (см. предложение 6.9).

3) и 2): Следует из 4) и свойств непрерывного исчисления.

1) Следует из 3) и плотности $C(K)$ в $(B(K), wm)$ (см. следствие 7.1). □

Для доказательства существования борелевского исчисления мы сперва докажем более общее утверждение о продолжении представлений коммутативных C^*-алгебр, а потом применим его к непрерывному исчислению от заданного оператора.

Теорема 7.4. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\pi\colon C(X) \to \mathscr{B}(H)$ — унитальный $*$-гомоморфизм. Тогда существует единственный непрерывный унитальный $*$-гомоморфизм $\tilde{\pi}\colon (B(X), wm) \to (\mathscr{B}(H), wo)$, продолжающий π:*

$$\begin{tikzcd} C(X) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j_C"'] & \mathscr{B}(H) \\ B(X) \arrow[ur, dashed, "\tilde{\pi}"'] & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные $x, y \in H$ и зададим функционал $F_{x,y}$ на $C(X)$ формулой $F_{x,y}(f) = \langle \pi(f)x, y\rangle$. По теореме Рисса–Маркова–Какутани, существует единственная мера $\mu_{x,y} \in M(X)$, такая, что

$$\langle \pi(f)x, y\rangle = \int_X f\, d\mu_{x,y} \quad \text{для каждой} \quad f \in C(X). \tag{7.1}$$

При этом $\|\mu_{x,y}\| = \|F_{x,y}\| \leqslant \|\pi\|\|x\|\|y\| = \|x\|\|y\|$ (см. предложение 6.9). Кроме того, легко видеть, что

$$\mu_{\alpha x+\beta y,z} = \alpha\mu_{x,z} + \beta\mu_{y,z} \quad \text{и} \quad \mu_{x,\alpha y+\beta z} = \bar\alpha\mu_{x,y} + \bar\beta\mu_{x,z} \tag{7.2}$$

для любых $x, y, z \in H$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Теперь воспользуемся тем, что правая часть (7.1) имеет смысл не только для непрерывной, но и для любой борелевской ограниченной f. А именно, возьмем любую $f \in B(X)$ и положим

$$\Phi_f(x, y) = \int_X f\, d\mu_{x,y} \qquad (x, y \in H).$$

Из (7.2) следует, что Φ_f — полуторалинейная форма на H. Кроме того, для любых $x, y \in H$ выполнено

$$|\Phi_f(x, y)| \leqslant \|f\|_\infty\|\mu_{x,y}\| \leqslant \|f\|_\infty\|x\|\|y\|,$$

поэтому Φ ограничена. Следовательно, ввиду теоремы 7.1, существует единственный оператор $\tilde\pi(f) \in \mathscr{B}(H)$ такой, что

$$\langle \tilde\pi(f)x, y\rangle = \Phi_f(x, y) = \int_X f\, d\mu_{x,y} \qquad (x, y \in H). \tag{7.3}$$

Правая часть последнего равенства линейно зависит от $f \in B(X)$, поэтому построенное отображение $\tilde\pi\colon B(X) \to \mathscr{B}(H)$ линейно. Далее, из (7.3) видно, что для любых $x, y \in H$ мы имеем $\|\tilde\pi(f)\|_{x,y} = \|f\|_{\mu_{x,y}}$. Следовательно, $\tilde\pi$ непрерывно относительно слабо-мерной топологии на $B(X)$ и слабо-операторной топологии на $\mathscr{B}(H)$.

Чтобы доказать, что $\tilde\pi$ — $*$-гомоморфизм, воспользуемся следующей леммой:

Лемма 7.1. *Пусть A, B — инволютивные полинормированные алгебры, $A_0 \subset A$ — плотная подалгебра, $\varphi\colon A \to B$ — непрерывное линейное отображение, ограничение которого на A_0 является $*$-гомоморфизмом. Тогда φ — $*$-гомоморфизм.*

Доказательство. Как обычно, для каждого $a \in A$ обозначим через $L_a, R_a\colon A \to A$ операторы левого (соответственно, правого) умножения на a. Мы знаем, что

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad \text{для любых} \quad a, b \in A_0.$$

Это означает, что

$$(\varphi \circ L_a)|_{A_0} = (L_{\varphi(a)} \circ \varphi)|_{A_0} \quad \text{для любого} \quad a \in A_0.$$

Поскольку оба отображения из последнего равенства непрерывны на A, а A_0 плотно в A, эти отображения должны совпадать всюду на A. Итак,

$$\varphi \circ L_a = L_{\varphi(a)} \circ \varphi \quad \text{для любого} \quad a \in A_0,$$

или, эквивалентно,

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad \text{для любого} \quad a \in A_0 \quad \text{и (уже!) любого} \quad b \in A.$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$(\varphi \circ R_b)|_{A_0} = (R_{\varphi(b)} \circ \varphi)|_{A_0} \quad \text{для любого} \quad b \in A.$$

Как и выше, отсюда следует, что участвующие в последнем равенстве отображения совпадают на всей A, а это и означает, что $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$ для любых $a, b \in A$, как и требовалось. Итак, φ — гомоморфизм алгебр. Наконец, отображения $a \mapsto \varphi(a^*)$ и $a \mapsto \varphi(a)^*$ из A в B по условию совпадают на A_0, а, значит (ввиду их непрерывности), и на всей A. Следовательно, φ — $*$-гомоморфизм. $\square$

Применяя только что доказанную лемму к нашей ситуации, мы получаем, что $\tilde{\pi}$ — $*$-гомоморфизм. Его единственность следует из плотности $C(X)$ в $(B(X), wm)$. Тем самым теорема доказана. $\square$

Замечание 7.5. Чтобы лучше уяснить суть доказательства последней теоремы, полезно взглянуть на следующие картинки:

$$\begin{tikzcd}
C(X) \arrow[rr, "j_C"] \arrow[dr, "F"'] & & B(X) \arrow[dl, dashed, "\tilde{F}"] \\
& \mathbb{C} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C(X) \arrow[rr, "j_C"] \arrow[dr, "\pi"] \arrow[ddr, "F_{x,y}"'] & & B(X) \arrow[dl, dashed, "\tilde{\pi}"'] \arrow[ddl, "\tilde{F}_{x,y}"] \\
& \mathscr{B}(H) \arrow[d, "\varepsilon_{x,y}"] & \\
& \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

Левая картинка показывает, что любой непрерывный функционал F на $C(X)$ продолжается (единственным образом) до wm-непрерывного функционала на $B(X)$. А именно, мы берем меру $\mu \in M(X)$, соответствующую F, и полагаем по определению $\tilde{F}(f) = \int_X f\,d\mu$ для любой $f \in B(X)$. В доказательстве теоремы, проиллюстрированном на правой картинке, аналогичная процедура применяется уже не к функционалам, а к представлениям. В этой картинке через $\varepsilon_{x,y}$ обозначен функционал на $\mathscr{B}(H)$, сопоставляющий оператору $T \in \mathscr{B}(H)$ его «матричный элемент» $\varepsilon_{x,y}(T) = \langle Tx, y\rangle$. Процедура продолжения представления π устроена так: по заданному π строится функционал $F_{x,y} = \varepsilon_{x,y} \circ T$ на $C(X)$, затем он продолжается до функционала $\tilde{F}_{x,y}$ на $B(X)$ (см. левую картинку), а потом все функционалы $\tilde{F}_{x,y}$ «склеиваются» в представление $\tilde{\pi}$ при помощи соответствия между операторами и полуторалинейными формами.

По-другому теорему 7.4 можно переформулировать так:

Теорема 7.5. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство. Существуют канонические биекции*

$$\left\{\begin{matrix} \textit{унитальные} \\ *\textit{-гомоморфизмы} \\ C(X) \to \mathscr{B}(H) \end{matrix}\right\} \rightleftarrows \left\{\begin{matrix} \textit{унитальные непрерывные} \\ *\textit{-гомоморфизмы} \\ (B(X), wm) \to (\mathscr{B}(H), wo) \end{matrix}\right\}$$

Здесь отображение, действующее справа налево, сопоставляет каждому гомоморфизму $\rho\colon B(X) \to \mathscr{B}(H)$ его ограничение на $C(X)$, а отображение, действующее слева направо, сопоставляет каждому $\pi\colon C(X) \to \mathscr{B}(H)$ его каноническое продолжение $\tilde{\pi}$ на $B(X)$.

В качестве следствия мы получаем теорему о существовании борелевского исчисления от нормального оператора.

Теорема 7.6. *Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор в гильбертовом пространстве H, $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, содержащий $\sigma(T)$. Тогда существует единственное борелевское исчисление $\gamma_b\colon B(K) \to \mathscr{B}(H)$ от T на K.*

Доказательство. Достаточно применить предыдущую теорему, взяв в качестве π непрерывное исчисление $\gamma_c\colon C(K) \to \mathscr{B}(H)$ от T на K. $\square$

С учетом теорем 6.7 и 7.5, мы можем переформулировать теорему о борелевском исчислении следующим образом:

Теорема 7.7. *Пусть H — гильбертово пространство, $K \subset \mathbb{C}$ — непустой компакт. Существуют канонические биекции*

$$\left\{\begin{matrix} \textit{нормальные} \\ T \in \mathscr{B}(H)\colon \\ \sigma(T) \subset K \end{matrix}\right\} \rightleftarrows \left\{\begin{matrix} \textit{унитальные} \\ *\textit{-гомоморфизмы} \\ C(K) \to \mathscr{B}(H) \end{matrix}\right\} \rightleftarrows \left\{\begin{matrix} \textit{унитальные непрерывные} \\ *\textit{-гомоморфизмы} \\ (B(K), wm) \to (\mathscr{B}(H), wo) \end{matrix}\right\}$$

Здесь стрелки, действующие между первым и вторым множествами — те же, что и в теореме 6.7, а между вторым и третьим множествами — те же, что и в теореме 7.5.

Замечание 7.6. Последняя теорема — это еще одна «вариация на тему» простейшего алгебраического принципа (см. главу 1): *линейные операторы — это представления алгебры многочленов* $\mathbb{C}[t]$. С этой точки зрения, «хорошие» линейные операторы — это »хорошие» представления $\mathbb{C}[t]$, которые продолжаются на ту или иную алгебру функций, содержащую $\mathbb{C}[t]$. В частности, ограниченные операторы в банаховом пространстве E — это в точности непрерывные представления в E алгебры целых функций $\mathscr{O}(\mathbb{C})$, а ограниченные операторы в E со спектром в компакте K — это непрерывные представления в E алгебры ростков $\mathscr{O}(K)$ (см. главу 4). Что же касается теоремы 7.7, то она показывает, представлениям каких алгебр отвечают нормальные ограниченные операторы в гильбертовом пространстве.

Чтобы лучше понять, как устроено борелевское исчисление, попробуйте описать его для «конкретных» операторов:

Упражнение 7.15. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ — ограниченная измеримая функция. Опишите борелевское исчисление для оператора умножения M_φ, действующего в $L^2(X, \mu)$. При этом обратите внимание на следующие частные случаи:

1) диагональный оператор M_λ в ℓ^2;

2) оператор умножения на «независимую переменную» $M_t \in \mathscr{B}(L^2[a, b])$, действующий по правилу $(M_t f)(x) = x f(x)$.

Упражнение 7.16*. (Для любителей гармонического анализа). Опишите борелевское исчисление для операторов сдвига в пространствах $\ell^2(\mathbb{Z})$, $L^2(\mathbb{T})$ и $L^2(\mathbb{R})$.

Указание. Сдвиг — это свертка с δ-функцией.

Посмотрим теперь, какими общими свойствами обладает борелевское исчисление. Первое свойство вполне предсказуемо (ср. упр. 4.12 и 6.12):

Упражнение 7.17. Пусть $K, L \subset \mathbb{C}$ — компакты, и $\sigma(T) \subset K \subset L$. Обозначим через γ_b^K и γ_b^L борелевские исчисления от T на K и L соответственно, а через $r_{LK}\colon B(L) \to B(K)$ — гомоморфизм ограничения.

Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} B(L) \arrow[d, "r_{LK}"'] \arrow[dr, "\gamma_b^L"] & \\ & \mathscr{B}(H) \\ B(K) \arrow[ur, "\gamma_b^K"'] & \end{tikzcd}$$

Поскольку борелевское исчисление продолжает непрерывное и не зависит от выбора компакта, содержащего $\sigma(T)$, мы в дальнейшем будем вместо $\gamma_b(f)$ использовать уже привычное обозначение $f(T)$ (для любой ограниченной борелевской функции f на $\sigma(T)$).

Напомним, что как для голоморфного, так и для непрерывного исчисления справедливы две важные теоремы: теорема об отображении спектра и теорема о композиции (см. §§4.2 и 6.3). Кроме того, непрерывное исчисление на спектре изометрично (теорема 6.6). Естественно поинтересоваться, справедливы ли аналогичные утверждения для борелевского исчисления.

Упражнение 7.18. 1) Изометрично ли борелевское исчисление $\gamma_b \colon B(\sigma(T)) \to \mathscr{B}(H)$?

2) Верно ли, что $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ для любой $f \in B(\sigma(T))$?

3) Пусть $K \supset \sigma(T)$ — компакт, $f \in B(K)$, $L \supset f(K)$ — другой компакт, и $g \in B(L)$. Верно ли, что $g(f(T)) = (g \circ f)(T)$?

Замечание 7.7. Левая часть последнего равенства имеет смысл, поскольку $\sigma(f(T)) = \sigma(\gamma_b(f)) \subset \sigma(f) = f(K) \subset L$.

Вот еще одно полезное приложение борелевского исчисления (ср. упр. 4.21):

Упражнение 7.19. Пусть $U \in \mathscr{B}(H)$ — унитарный оператор. Тогда существует самосопряженный $T \in \mathscr{B}(H)$ такой, что $U = \exp(iT)$.

Для обратимых неунитарных операторов аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно:

Упражнение 7.20*. Существуют гильбертово пространство H и обратимый оператор $U \in \mathscr{B}(H)$, не представимый в виде $\exp(T)$ ни для какого $T \in \mathscr{B}(H)$.

Указание. В качестве H подойдет пространство $L^2(V) \cap \mathscr{O}(V)$ для некоторой классической области $V \subset \mathbb{C}$. (См. также более простое упр. 4.22.)

Литературные указания

Материал о соответствии между операторами и полуторалинейными формами стандартен и есть почти в любом учебнике по функциональному анализу; мы следовали, в основном, [30]. Про комплексные меры можно прочитать, например, в [9, 31]; мы пользовались также лекциями Р. Эдвардса [37]. Термин «слабо-мерная топология» принадлежит А. Я. Хелемскому; см. [30]. Слабо-операторная топология — одна из стандартных топологий, давно используемых в теории операторных алгебр. Отметим, что, кроме нее, на $\mathscr{B}(H)$ есть еще по крайней мере пять важных ненормируемых топологий. О некоторых из них см. [29, 30, 20, 2]. При изложении теоремы о борелевском исчислении мы следовали, в основном, [29]. Несколько другое доказательство (для случая самосопряженного оператора) приведено в [30]. См. также [14, 23, 26, 10].

8. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Спектральная теорема — это, в сущности, не одна теорема, а несколько тесно взаимосвязанных утверждений, описывающих строение произвольного нормального оператора в гильбертовом пространстве. Какое именно из этих утверждений следует называть «спектральной теоремой» — дело вкуса[1]. Чтобы лучше понять смысл спектральной теоремы, полезно вначале выяснить, как она выглядит в конечномерном случае.

В курсе линейной алгебры обычно доказывают, что каждая эрмитова матрица диагонализируется в подходящем ортонормированном базисе. На языке операторов это означает, что каждый самосопряженный оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ в конечномерном гильбертовом пространстве H имеет вид

$$T = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k E_k,$$

где E_k — проекторы на попарно ортогональные подпространства. Спектральная теорема является обобщением этого утверждения на бесконечномерный случай. Она утверждает, говоря неформально, что любой самосопряженный (и, более общо, любой нормальный) оператор T в гильбертовом пространстве H можно в некотором смысле «разложить по проекторам». Существенное отличие от конечномерного случая состоит в том, что это разложение уже не является конечной линейной комбинацией проекторов и даже не является суммой ряда. Дело в том, что если какой-то оператор T представим в указанном выше виде, то E_k обязан быть проектором на его собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ_k. Но, как мы уже знаем, у T может вообще не быть собственных значений.

Выход из этой ситуации таков. Вспомним доказательство теоремы о борелевском исчислении (см. предыдущую главу). В доказательстве участвовали некоторые комплексные меры $\mu_{x,y}$, занумерованные парами векторов $x, y \in H$. Напомним (см. (7.3)), что для любой ограниченной борелевской функции f на $\sigma(T)$ оператор $f(T)$ однозначно определяется равенством

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, d\mu_{x,y}(\lambda).$$

[1] См. по этому поводу обсуждение в [23].

В частности, при $f(\lambda) \equiv \lambda$ мы имеем

$$\langle Tx, y\rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda \, d\mu_{x,y}(\lambda).$$

Эта формула наводит на следующую мысль: а нельзя ли сам оператор T представить в виде некоторого (на этот раз — операторнозначного) интеграла

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, d(?)(\lambda)$$

(понимаемого в каком-либо разумном смысле, например, как предел интегральных сумм)? Оказывается, можно. В этом как раз и состоит спектральная теорема (точнее, один из ее вариантов). Чтобы придать смысл последней формуле, нужно сперва определить, что там должно стоять вместо вопросительного знака, т.е. по какой мере берется интеграл. Меры, участвующие в формулировке спектральной теоремы, принимают значения в множестве проекторов и называются *спектральными мерами*.

8.1. Спектральные меры

Пусть H — гильбертово пространство. Обозначим через $\mathrm{PR}(H)$ множество всех ортопроекторов в H. Очевидно, имеется биекция между $\mathrm{PR}(H)$ и множеством всех замкнутых векторных подпространств в H, сопоставляющая каждому проектору его образ. При этом оказывается, что многие геометрические соотношения между подпространствами можно переписать в виде алгебраических соотношений между проекторами. Вот несколько иллюстраций:

Определение 8.1. Будем говорить, что проекторы $P, Q \in \mathrm{PR}(H)$ *ортогональны* (и писать $P \perp Q$), если $\mathrm{Im}\, P \perp \mathrm{Im}\, Q$.

Упражнение 8.1. $P \perp Q \iff PQ = 0 \iff QP = 0 \iff P + Q \in \in \mathrm{PR}(H)$. При этом $\mathrm{Im}(P+Q) = \mathrm{Im}\, P \oplus \mathrm{Im}\, Q$.

Упражнение 8.2. Пусть $P, Q \in \mathrm{PR}(H)$. Тогда $PQ \in \mathrm{PR}(H) \iff \iff PQ = QP$. При этом $\mathrm{Im}(PQ) = \mathrm{Im}\, P \cap \mathrm{Im}\, Q$.

В дальнейшем нам также понадобится следующее свойство ортогональных проекторов:

Упражнение 8.3. Пусть $P_1, \ldots, P_n \in \mathrm{PR}(H)$, и $P_i \perp P_j$ при $i \neq j$. Тогда

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k \Big\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_k|$$

для любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Пусть теперь X — множество, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств.

Определение 8.2. Отображение $E\colon \mathscr{A} \to \mathrm{PR}(H)$ называется *спектральной мерой*, если

1) $E(\varnothing) = 0$;
2) $E(X) = \mathbf{1}_H$;
3) $E(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} E(A_k)$, если $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$;
4) $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ для любых $A, B \in \mathscr{A}$.

Заметим, что из последнего свойства следует, что $E(A) \perp E(B)$ при $A \cap B = \varnothing$.

Упражнение 8.4. Докажите, что свойство 3) в определении спектральной меры следует из свойства 4).

Упражнение 8.5. Пусть $\mathscr{A}$ содержит все одноэлементные подмножества X. Опишите все спектральные меры $\mathscr{A} \to \mathrm{PR}(\mathbb{C})$.

Предложение 8.1. *Пусть $E\colon \mathscr{A} \to \mathrm{PR}(H)$ — спектральная мера. Для любых $x, y \in H$ и любого $A \in \mathscr{A}$ положим $E_{x,y}(A) = \langle E(A)x, y\rangle$. Тогда $E_{x,y} \in \mathcal{M}_{\mathscr{A}}(X)$, и $\|E_{x,y}\| \leqslant \|x\|\|y\|$.*

Доказательство. Очевидно, $E_{x,y}$ — мера на $\mathscr{A}$. Чтобы доказать, что она имеет ограниченную вариацию, возьмем любой конечный набор $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathscr{A}$ попарно не пересекающихся множеств, и для каждого $k = 1, \ldots, n$ подберем $\lambda_k \in \mathbb{C}$ так, чтобы $|\langle E(A_k)x, y\rangle| = \lambda_k \langle E(A_k)x, y\rangle$ и $|\lambda_k| = 1$. С учетом упражнения 8.3, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |\langle E(A_k)x, y\rangle| = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle E(A_k)x, y\rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(A_k)x, y \Big\rangle \\ \leqslant \Big\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(A_k) \Big\| \|x\|\|y\| \leqslant \|x\|\|y\|. \end{aligned}$$

Иначе говоря, $E_{x,y}$ имеет ограниченную вариацию, и $|E_{x,y}|(A) \leqslant \|x\|\|y\|$ для любого $A \in \mathscr{A}$. Дальше ясно. $\square$

Пример 8.1. Пусть $(X, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство с мерой, и пусть $H = L^2(X, \mu)$. Для каждого $A \in \mathscr{A}$ положим $E(A) = M_{\chi_A}$ (оператор умножения на характеристическую функцию множества A). Тогда, очевидно, E — спектральная мера на $\mathscr{A}$. Если мера μ конечна, то функция, тождественно равная 1, лежит в $L^2(X,\mu)$, и $\mu = E_{1,1}$.

Вот чуть более общий пример:

Пример 8.2. Пусть $\rho\colon B_{\mathscr{A}}(X) \to \mathscr{B}(H)$ — унитальный $*$-гомоморфизм. Тогда

$$E^\rho\colon \mathscr{A} \to \mathrm{PR}(H), \quad E^\rho(A) = \rho(\chi_A)$$

— спектральная мера на $\mathscr{A}$.

Оказывается, других спектральных мер и не бывает:

Теорема 8.1. *Пусть $E\colon \mathscr{A} \to \mathrm{PR}(H)$ — спектральная мера на σ-алгебре $\mathscr{A} \subset 2^X$. Тогда существует единственный унитальный $*$-гомоморфизм $I_E\colon B_{\mathscr{A}}(X) \to \mathscr{B}(H)$ такой, что $I_E(\chi_A) = E(A)$ для любого $A \in \mathscr{A}$. При этом*

$$\langle I_E(f)x, y\rangle = \int_X f\,dE_{x,y} \tag{8.1}$$

для любой $f \in B_{\mathscr{A}}(X)$ и любых $x, y \in H$.

Доказательство. Зафиксируем $f \in B_{\mathscr{A}}(X)$ и для любых $x, y \in H$ положим

$$\varPhi_f(x,y) = \int_X f\,dE_{x,y}.$$

Их определения меры $E_{x,y}$ следует, что $\varPhi_f$ — полуторалинейная форма на H. Кроме того, с учетом предложения 8.1,

$$|\varPhi_f(x,y)| \leqslant \|f\|\|E_{x,y}\| \leqslant \|f\|\|x\|\|y\|,$$

поэтому $\varPhi_f$ ограничена, и $\|\varPhi_f\| \leqslant \|f\|$. Следовательно, существует единственный оператор $I_E(f) \in \mathscr{B}(H)$, удовлетворяющий (8.1). Легко видеть, что полученное отображение $I_E\colon B_{\mathscr{A}}(X) \to \mathscr{B}(H)$ линейно, и $\|I_E(f)\| = \|\varPhi_f\| \leqslant \|f\|$ для любой $f \in B_{\mathscr{A}}(X)$. Из (8.1) следует также, что $I_E(\chi_A) = E(A)$ для любого $A \in \mathscr{A}$, поэтому

$$I_E(\chi_A\chi_B) = I_E(\chi_{A\cap B}) = E(A\cap B) = E(A)E(B)$$

для любых $A, B \in \mathscr{A}$. Следовательно, ограничение I_E на алгебру $S_{\mathscr{A}}(X)$ простых функций — гомоморфизм. Из непрерывности I_E и плотности $S_{\mathscr{A}}(X)$ в $B_{\mathscr{A}}(X)$ мы заключаем, что $I_E\colon B_{\mathscr{A}}(X) \to \mathscr{B}(H)$ — гомоморфизм. Отсюда же следует утверждение о единственности I_E. Наконец, поскольку $E_{y,x} = \overline{E_{x,y}}$ для любых $x, y \in H$, мы получаем

$$\langle I_E(\bar f)x, y\rangle = \int_X \bar f \, dE_{x,y} = \overline{\int_X f \, dE_{y,x}} = \overline{\langle I_E(f)y, x\rangle} = \\ = \langle x, I_E(f)y\rangle = \langle I_E(f)^* x, y\rangle.$$

Следовательно, I_E — $*$-гомоморфизм. Теорема доказана. □

Определение 8.3. Для любой функции $f \in B_{\mathscr{A}}(X)$ оператор $I_E(f)$ называется *интегралом* f по спектральной мере E и обозначается через

$$\int_X f(\lambda)\, dE(\lambda).$$

Замечание 8.1. Вы, наверное, заметили, что доказательство последней теоремы похоже на доказательство теоремы 7.4 о продолжении представлений с $C(X)$ на $B(X)$: в обоих случаях применяется один и тот же прием «склеивания» при помощи полуторалинейных форм.

С учетом примера 8.2, последнюю теорему можно переформулировать следующим образом:

Теорема 8.2. *Пусть X — множество, $\mathscr{A} \subset 2^X$ — σ-алгебра его подмножеств. Существуют канонические биекции*

$$\left\{ \begin{matrix} \text{спектральные меры} \\ \mathscr{A} \to \mathrm{PR}(H) \end{matrix} \right\} \quad \rightleftarrows \quad \left\{ \begin{matrix} \text{унитальные } *\text{-гомоморфизмы} \\ B_{\mathscr{A}}(X) \to \mathscr{B}(H) \end{matrix} \right\}$$

Здесь отображение, действующее справа налево, сопоставляет каждому гомоморфизму $\rho\colon B_{\mathscr{A}}(X) \to \mathscr{B}(H)$ спектральную меру E^ρ (см. пример 8.2), а отображение, действующее слева направо, сопоставляет каждой спектральной мере $E\colon \mathscr{A} \to \mathrm{PR}(H)$ гомоморфизм $I_E\colon B_{\mathscr{A}}(X) \to \mathscr{B}(H)$.

Применяя эту теорему к борелевскому исчислению от нормального оператора, получаем следующий результат:

Следствие 8.1. *Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор, $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, содержащий $\sigma(T)$. Тогда существует спектральная мера $E\colon \mathscr{B}or(K) \to \mathrm{PR}(H)$ такая, что*

$$T = \int_K \lambda \, dE(\lambda). \tag{8.2}$$

При этом для любой $f \in B(K)$ справедлива формула

$$f(T) = \int_K f(\lambda)\, dE(\lambda). \tag{8.3}$$

8.2. Регулярные спектральные меры и представления алгебры $C(X)$. Спектральная теорема

Следствие 8.1 можно рассматривать как некий «суррогат» спектральной теоремы. Почему «суррогат»? Дело в том, что спектральная мера, о которой здесь идет речь, определяется соотношением (8.2) неоднозначно (хотя, конечно, более сильное условие (8.3) влечет за собой равенство $E(A) = \chi_A(T)$ и полностью определяет меру E). Однако борелевское исчисление — это не просто унитальный $*$-гомоморфизм из $B(X)$ в $\mathscr{B}(H)$, он еще и непрерывен относительно слабо-мерной топологии wm на $B(X)$ и слабо-операторной топологии wo на $\mathscr{B}(H)$. Поэтому, чтобы добиться желаемого взаимно-однозначного соответствия между операторами и спектральными мерами, естественно попытаться выяснить, какие спектральные меры отвечают гомоморфизмам, непрерывным относительно этих «ослабленных» топологий.

Итак, пусть теперь X — компактное хаусдорфово топологическое пространство.

Определение 8.4. Говорят, что спектральная мера $E\colon \mathscr{B}or(X) \to \to \mathrm{PR}(H)$ *регулярна*, если для любых $x, y \in H$ комплексная мера $E_{x,y}$ регулярна.

Предложение 8.2. *Спектральная мера $E\colon \mathscr{B}or(X) \to \mathrm{PR}(H)$ регулярна $\iff$ гомоморфизм $I_E\colon B(X) \to \mathscr{B}(H)$ непрерывен относительно слабо-мерной топологии на $B(X)$ и слабо-операторной топологии на $\mathscr{B}(H)$.*

Доказательство. ($\Longrightarrow$) Если E регулярна, то для любых $x, y \in H$ и любой $f \in B(X)$ выполнено

$$\|I_E(f)\|_{x,y} = |\langle I_E(f)x, y\rangle| = \left|\int_X f\, dE_{x,y}\right| = \|f\|_{E_{x,y}}.$$

Отсюда следует непрерывность I_E относительно указанных топологий.

($\Longleftarrow$) Зафиксируем произвольные $x, y \in H$. Из wm-wo-непрерывности I_E следует, что найдутся $\mu_1, \ldots, \mu_n \in M(X)$ и $C > 0$ такие, что

$$\|I_E(f)\|_{x,y} \leqslant C \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \|f\|_{\mu_k} \tag{8.4}$$

для любой $f \in B(X)$. Положим $\mu = \sum_{k=1}^n |\mu_k|$; тогда $\mu \in M(X)$ и $\mu \geqslant 0$. Подставляя в (8.4) вместо f функцию χ_B, получаем

$$|E_{x,y}(B)| = |\langle E(B)x, y\rangle| \leqslant C \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\mu_k(B)| \leqslant C\mu(B).$$

Следовательно, для любого разбиения $B = \bigsqcup_{k=1}^m B_k$ мы имеем

$$\sum_{k=1}^m |E_{x,y}(B_k)| \leqslant C \sum_{k=1}^m \mu(B_k) = C\mu(B),$$

поэтому $|E_{x,y}|(B) \leqslant C\mu(B)$ для любого борелевского B. Из этого неравенства и регулярности μ немедленно следует регулярность $E_{x,y}$. $\square$

Подведем итоги.

Теорема 8.3. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство. Существуют канонические биекции*

$$\left\{\begin{matrix} \textit{унитальные} \\ *\textit{-гомоморфизмы} \\ C(X) \to \mathscr{B}(H) \end{matrix}\right\} \rightleftarrows \left\{\begin{matrix} \textit{унитальные непрерывные} \\ *\textit{-гомоморфизмы} \\ (B(X), wm) \to (\mathscr{B}(H), wo) \end{matrix}\right\} \rightleftarrows$$

$$\rightleftarrows \left\{\begin{matrix} \textit{регулярные} \\ \textit{спектральные меры} \\ \mathscr{B}or(X) \to \mathrm{PR}(H) \end{matrix}\right\}$$

Биекции между первым и вторым множествами описаны в теореме 7.5, а биекции между вторым и третьим множествами — в теореме 8.2.

Наконец, объединяя последнюю теорему с теоремой 7.7, мы получаем следующее:

Теорема 8.4. *Пусть H — гильбертово пространство, $K \subset \mathbb{C}$ — непустой компакт. Существуют канонические биекции*

$$\left\{\begin{matrix} \textit{нормальные операторы} \\ T \in \mathscr{B}(H): \\ \sigma(T) \subset K \end{matrix}\right\} \rightleftarrows \left\{\begin{matrix} \textit{унитальные} \\ *\textit{-гомоморфизмы} \\ C(K) \to \mathscr{B}(H) \end{matrix}\right\} \rightleftarrows$$

$$\rightleftarrows \left\{\begin{matrix} \textit{унитальные непрерывные} \\ *\textit{-гомоморфизмы} \\ (B(K), wm) \to (\mathscr{B}(H), wo) \end{matrix}\right\} \rightleftarrows \left\{\begin{matrix} \textit{регулярные} \\ \textit{спектральные меры} \\ \mathscr{B}or(K) \to \mathrm{PR}(H) \end{matrix}\right\}$$

Вот, наконец, и спектральная теорема в ее традиционной формулировке:

Теорема 8.5 (спектральная теорема для нормального оператора). *Пусть H — гильбертово пространство, $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор, $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, содержащий $\sigma(T)$. Тогда существует единственная регулярная спектральная мера $E\colon \mathscr{B}or(K) \to \mathrm{PR}(H)$ такая, что*

$$T = \int_K \lambda \, dE(\lambda). \tag{8.5}$$

При этом для любой $f \in B(K)$ справедлива формула

$$f(T) = \int_K f(\lambda)\, dE(\lambda).$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться биекцией между первым и последним множествами в предыдущей теореме. □

Упражнение 8.6. В условиях теоремы докажите, что $E(B) = E(B \cap \sigma(T))$ для любого борелевского $B \subset K$ (иначе говоря, мера E «сосредоточена» на $\sigma(T)$).

Определение 8.5. Спектральная мера E, фигурирующая в формулировке спектральной теоремы, называется *разложением единицы* оператора T, а проекторы $E(B)$ (для всевозможных борелевских подмножеств $B \subset K$) — его *спектральными проекторами.* Формула (8.5) называется *спектральным разложением* оператора T.

Упражнение 8.7. Опишите разложение единицы для операторов умножения и сдвига из упражнений 7.15 и 7.16*.

В заключение посмотрим, как в терминах разложения единицы можно описать собственные подпространства и точечный спектр нормального оператора.

Предложение 8.3. *Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор, $E\colon \mathscr{B}or(K) \to \mathrm{PR}(H)$ — его разложение единицы. Тогда*

1) $\mathrm{Ker}(T - \lambda\mathbf{1}) = \mathrm{Im}\, E(\{\lambda\})$ для любого $\lambda \in \sigma(T)$.
2) $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : E(\{\lambda\}) \neq 0\}$.

Доказательство. Очевидно, в алгебре $B(K)$ справедливо равенство $(t - \lambda)\chi_{\{\lambda\}} = 0$ (здесь, как и прежде, через t обозначена функция $t(z) = z$). Применяя борелевское исчисление γ_b, получаем $(T - \lambda\mathbf{1})E(\{\lambda\}) = 0$, т.е. $\mathrm{Im}\, E(\{\lambda\}) \subset \mathrm{Ker}(T - \lambda\mathbf{1})$. Докажем противоположное включение.

Упражнение 8.8. Для любого $S \in \mathscr{B}(H)$ справедливо равенство $\mathrm{Ker}\, S = \mathrm{Ker}\, S^*S$. Как следствие, если S нормален, то $\mathrm{Ker}\, S = \mathrm{Ker}\, S^*$.

Из этого упражнения следует, что $\mathrm{Ker}(T - \lambda\mathbf{1}) = \mathrm{Ker}(T^* - \bar\lambda\mathbf{1})$. Следовательно, для любого $x \in \mathrm{Ker}(T - \lambda\mathbf{1})$ и любых $m, n \in \mathbb{Z}_+$ выполнено

$$T^n (T^*)^m x = \lambda^n \bar\lambda^m x. \tag{8.6}$$

Обозначим через $P \subset B(K)$ унитальную подалгебру, порожденную функциями t и $\bar t$. Тогда из (8.6) следует, что $f(T)x = f(\lambda)x$ для любой $f \in P$.

Теперь зафиксируем произвольный $y \in H$. Из свойств борелевского исчисления следует, что отображения

$$f \mapsto \langle f(T)x, y \rangle \quad \text{и} \quad f \mapsto f(\lambda)\langle x, y \rangle$$

являются непрерывными линейными функционалами на полинормированном пространстве $(B(K), wm)$. Как было отмечено выше, они совпадают на подалгебре $P \subset B(K)$. Но P плотна в $(B(K), wm)$ (почему?), так что эти функционалы совпадают на всей $B(K)$. Ввиду произвольности $y \in H$ мы заключаем, что $f(T)x = f(\lambda)x$ для любой $f \in B(K)$ и любого $x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda\mathbf{1})$. Полагая в последней формуле $f = \chi_{\{\lambda\}}$, мы получаем $E(\{\lambda\})x = x$, т.е. $x \in \operatorname{Im} E(\{\lambda\})$. С учетом сказанного выше, это доказывает 1). Утверждение 2) — это прямое следствие 1). $\square$

8.3. Спектральная теорема в терминах интеграла Римана–Стилтьеса

Обсудим теперь несколько иной подход к спектральной теореме, основанный на понятии операторнозначного интеграла Римана–Стилтьеса. Хотя этот подход менее общий, чем предыдущий, и дает менее сильные результаты, у него есть и определенные достоинства — в первую очередь, конструктивность. Кроме того, он технически проще, поскольку не опирается на общую теорию меры.

Напомним вначале классическое определение интеграла Римана–Стилтьеса. Пусть $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — некоторая неубывающая функция. Возьмем какое-либо разбиение

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = b$$

отрезка $[a, b]$, и на каждом отрезке разбиения $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ выберем точку ξ_i. Полученное размеченное разбиение обозначим через $P(\lambda, \xi)$; его диаметром называется число $d = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(\lambda_i - \lambda_{i-1})$. Возьмем функцию $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ и каждому размеченному разбиению $P(\lambda, \xi)$ сопоставим интегральную сумму

$$S(f, P(\lambda, \xi)) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\varphi(\lambda_i) - \varphi(\lambda_{i-1})).$$

По определению, число $I \in \mathbb{C}$ называется *интегралом Римана–Стилтьеса* функции f по отрезку $[a, b]$ относительно φ, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения $P(\lambda, \xi)$ с диаметром меньше δ выполнено неравенство $|S(f, P(\lambda, \xi)) - I| < \varepsilon$.

При этом пишут

$$I = \int_a^b f(\lambda)\, d\varphi(\lambda).$$

Если $\varphi(\lambda) \equiv \lambda$, то мы получаем обычное определение интеграла Римана. Как и в случае интеграла Римана, можно показать, что *любая непрерывная на $[a,b]$ функция интегрируема по Риману–Стилтьесу.*

Аналогичное определение можно дать и в том случае, когда φ — неубывающая функция со значениями в $\mathrm{PR}(H)$. Конечно, для того, чтобы слово «неубывающая» имело смысл, надо сперва ввести отношение порядка в $\mathrm{PR}(H)$.

Упражнение 8.9. Пусть H — гильбертово пространство, $P, Q \in \mathrm{PR}(H)$ — проекторы. Следующие условия эквивалентны:
1) $\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Im} Q$;
2) $PQ = QP = P$;
3) $\langle Px, x\rangle \leqslant \langle Qx, x\rangle$ для любого $x \in H$;
4) $Q - P \in \mathrm{PR}(H)$.

Определение 8.6. Если $P, Q \in \mathrm{PR}(H)$ удовлетворяют этим условиям, то говорят, что P не превосходит Q, и пишут $P \leqslant Q$.

Упражнение 8.10. Пусть $E\colon [a,b] \to \mathrm{PR}(H)$, $E(\lambda) = E_\lambda$ — неубывающая функция, такая, что $E_a = 0$, $E_b = \mathbf{1}_H$.

1) Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Дайте определение интеграла Римана–Стилтьеса $\int_a^b f(\lambda)\, dE_\lambda$ как ограниченного оператора в H и докажите, что он существует, если f непрерывна.

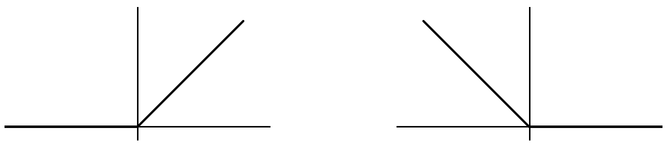
2) Положим $T = \int_a^b \lambda\, dE_\lambda$. Тогда $T^* = T$, $\sigma(T) \subset [a,b]$, и для любой $f \in C[a,b]$ выполнено $f(T) = \int_a^b f(\lambda)\, dE_\lambda$.

Таким образом, каждой неубывающей функции $E\colon [a,b] \to \mathrm{PR}(H)$ соответствует самосопряженный оператор $T = \int_a^b \lambda\, dE_\lambda \in \mathscr{B}(H)$. Опишем теперь обратную конструкцию, которая по заданному самосопряженному оператору $T \in \mathscr{B}(H)$ выдает такую функцию E.

Итак, пусть $T = T^* \in \mathscr{B}(H)$. Напомним, что $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ (см. предложение 6.6), и возьмем какой-нибудь полуинтервал $(a,b]$, содержащий $\sigma(T)$.

Рассмотрим функции

$$t_+(\lambda) = \begin{cases} \lambda, & \lambda \geqslant 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad t_-(\lambda) = \begin{cases} -\lambda, & \lambda \leqslant 0 \\ 0, & \lambda > 0 \end{cases}$$



Для каждого $\lambda \in [a,b]$ положим $H_\lambda = \mathrm{Ker}(t-\lambda)_+(T)$, и обозначим через E_λ ортопроектор на H_λ.

Определение 8.7. Построенная выше функция $E\colon [a,b] \to \mathrm{PR}(H)$ называется *спектральной функцией* оператора T.

Упражнение 8.11. Пусть $E'\colon \mathscr{B}or([a,b]) \to \mathrm{PR}(H)$ — разложение единицы T. Тогда $E_\lambda = E'([a,\lambda])$ для любого $\lambda \in [a,b]$.

Замечание 8.2. Благодаря этому свойству спектральной функции, часто ее саму называют разложением единицы оператора T.

Упражнение 8.12 (спектральная теорема). Докажите, что

1) $E_{a+\delta} = 0$ для некоторого $\delta > 0$, и $E_b = \mathbf{1}_H$;

2) $E\colon [a,b] \to \mathrm{PR}(H)$, $E(\lambda) = E_\lambda$ — неубывающая функция;

3) для каждого $x \in H$ функция $[a,b] \to H$, $\lambda \mapsto E_\lambda x$ непрерывна справа;

4) $T = \int_a^b \lambda\, dE_\lambda$;

5) функция $E\colon [a,b] \to \mathrm{PR}(H)$ со свойствами 1)–4) единственна;

6) $f(T) = \int_a^b f(\lambda)\, dE_\lambda$ для любой $f \in C[a,b]$.

Указание к 5). Пусть E — какая-то функция со свойствами 1), 2) и 4), и пусть E' — разложение единицы оператора T из 4). Вначале докажите, что $E_\lambda \leqslant E'([a,\lambda]) \leqslant E_\mu$ при $\lambda < \mu$, а затем воспользуйтесь 3).

Упражнение 8.13. Для любой неубывающей функции $E\colon [a,b] \to \mathrm{PR}(H)$ свойство 3), указанное в предыдущем упражнении, эквивалентно непрерывности справа отображения $E\colon [a,b] \to (\mathrm{PR}(H), wo)$.

Полученные результаты удобно переформулировать следующим образом:

Теорема 8.6. *Существуют канонические биекции*

$$\left\{ \begin{matrix} \textit{самосопряженные} \\ T \in \mathscr{B}(H): \\ \sigma(T) \subset (a,b] \end{matrix} \right\} \quad \rightleftarrows \quad \left\{ \begin{matrix} \textit{неубывающие } E\colon [a,b] \to \mathrm{PR}(H)\textit{:} \\ \exists \delta > 0: \; E_{a+\delta} = 0, \; E_b = \mathbf{1}_H, \textit{ и} \\ \lambda \mapsto E_\lambda x \textit{ непрерывна справа } \forall x \end{matrix} \right\}$$

Здесь стрелка, действующая из первого множества во второе, сопоставляет оператору T его спектральную функцию, а стрелка, действующая из второго множества в первое, сопоставляет функции E оператор $\int_a^b \lambda \, dE_\lambda$.

Следующее упражнение объясняет происхождение термина «непрерывный спектр».

Упражнение 8.14. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженный оператор, $E\colon [a,b] \to \mathrm{PR}(H)$ — его спектральная функция, $\lambda_0 \in \sigma(T)$. Тогда

$$\lambda_0 \in \sigma_c(T) \iff \text{функция } \lambda \mapsto E_\lambda x \text{ непрерывна в } \lambda_0 \text{ для любого } x \in H.$$

Литературные указания

Спектральная теорема — одна из вершин классического функционального анализа, и в том или ином виде присутствует в большинстве учебников по функциональному анализу и операторным алгебрам. Мы следовали главным образом книгам [29, 30, 20] (в первой и третьей из них спектральная теорема доказана в терминах спектральных мер, а во второй — еще и в терминах интеграла Римана–Стилтьеса; ср. §8.3). См. также [14, 10, 23, 26].

9. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ НОРМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Мы уже упоминали, что спектральная теорема представляет собой совокупность близких друг к другу результатов о строении нормальных операторов. Сейчас нам известны два таких результата — теорема о борелевском исчислении и теорема о спектральном разложении. Наша следующая цель — доказать еще одну разновидность спектральной теоремы, утверждающую, что любой нормальный оператор в гильбертовом пространстве унитарно эквивалентен оператору умножения M_φ на измеримую ограниченную функцию, действующему в пространстве $L^2(X, \mu)$. Иными словами, у любого нормального оператора есть *функциональная модель*. Напомним, что пользу от функциональных моделей мы уже почувствовали, исследуя спектры операторов сдвига на группах (см. главу 3).

9.1. Модули, банаховы модули, гильбертовы модули

Вначале напомним несколько алгебраических определений. Мы уже много раз убеждались, что говорить об операторах — это все равно, что говорить о представлениях тех или иных функциональных алгебр. Вы, вероятно, знаете, что представления какой-либо алгебры — это примерно то же самое, что модули над этой алгеброй. В дальнейшем язык модулей для нас будет более удобен, чем язык представлений, поэтому напомним вкратце, что это такое.

Пусть A — алгебра (как всегда, над $\mathbb{C}$), M — векторное пространство. Говорят, что на M задана структура *левого A-модуля*, если задано билинейное отображение $A \times M \to M$, $(a, x) \mapsto a \cdot x$ такое, что $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ для всех $a, b \in A$, $x \in M$. Если A унитальна и $1 \cdot x = x$ для всех $x \in M$, то M называется *унитальным*.

Пусть M — левый A-модуль. Для каждого $a \in A$ рассмотрим оператор $L_a \colon M \to M$, $x \mapsto a \cdot x$. Легко видеть, что отображение $A \to \mathscr{L}(M)$, $a \mapsto L_a$ — гомоморфизм алгебр, т.е. представление алгебры A в векторном пространстве M. Обратно, если M — векторное пространство, а $\pi \colon A \to \mathscr{L}(M)$ — представление A в M, то M становится левым A-модулем относительно операции $a \cdot x = \pi(a)x$ ($a \in A$, $x \in M$). Очевидно, эти две конструкции («модуль $\to$ представление» и «представление $\to$ модуль») обратны друг к другу. При этом, если A унитальна, то унитальным модулям соответствуют унитальные представления, и наоборот.

Определение 9.1. Пусть A — банахова алгебра. *Левый банахов A-модуль* — это банахово пространство M, снабженное структурой левого A-модуля так, что отображение $A \times M \to M$, $(a, x) \mapsto a \cdot x$ непрерывно.

Напомним (см. упр. 2.8). что непрерывность в этом определении эквивалентна существованию константы $C > 0$, такой, что $\|a \cdot x\| \leqslant C\|a\|\|x\|$ для любых $a \in A$ и $x \in M$. Это, в свою очередь, означает, что все операторы $L_a \in \mathscr{L}(M)$ ограничены, и $\|L_a\| \leqslant C\|a\|$ для всех $a \in A$. Таким образом, получаем непрерывный гомоморфизм $A \to \mathscr{B}(M)$, $a \mapsto L_a$, т.е. непрерывное представление алгебры A. Обратно, если задано непрерывное представление $\pi\colon A \to \mathscr{B}(M)$ алгебры A в банаховом пространстве M, то M становится левым банаховым A-модулем относительно операции $a \cdot x = \pi(a)x$ $(a \in A,\ x \in M)$.

Определение 9.2. Если M, N — левые банаховы A-модули, то *морфизмом* из M в N называется непрерывный оператор $\varphi \in \mathscr{B}(M, N)$ такой, что $\varphi(a \cdot x) = a \cdot \varphi(x)$ для всех $a \in A$, $x \in M$. (Иными словами, морфизм банаховых A-модулей — это их морфизм как A-модулей, который непрерывен.)

Очевидно, левые банаховы A-модули и их морфизмы образуют категорию; она обозначается $A\text{-}\mathsf{mod}$. Через $A\text{-}\mathsf{mod}_1$ обозначается подкатегория в $A\text{-}\mathsf{mod}$, объекты которой — те же, что в $A\text{-}\mathsf{mod}$, а морфизмы — только те морфизмы банаховых модулей, норма которых не превосходит 1:

$$\mathbf{h}_{A\text{-}\mathsf{mod}_1}(M, N) = \{\varphi \in \mathbf{h}_{A\text{-}\mathsf{mod}}(M, N) : \|\varphi\| \leqslant 1\}.$$

Изоморфизмы в $A\text{-}\mathsf{mod}_1$ — это в точности изометрические изоморфизмы модулей (ср. пример 5.5).

Предположим теперь, что A — инволютивная банахова алгебра. В этом случае разумно выделить класс банаховых A-модулей, которые являются гильбертовыми пространствами и должным образом реагируют на инволюцию.

Определение 9.3. Пусть A — инволютивная банахова алгебра. *Левый гильбертов A-модуль* — это гильбертово пространство H со структурой левого A-модуля, превращающей его в банахов A-модуль, такой, что $\langle a \cdot x, y\rangle = \langle x, a^* \cdot y\rangle$ для всех $x, y \in H$, $a \in A$.

Легко видеть, что последнее равенство в этом определении означает в точности, что $A \to \mathscr{B}(H)$, $a \mapsto L_a$ — $*$-гомоморфизм. Обратно, если H — гильбертово пространство, то каждый непрерывный $*$-гомоморфизм $A \to \mathscr{B}(H)$ превращает H в левый гильбертов A-модуль.

Замечание 9.1. Мы используем термин «гильбертов модуль» в том смысле, в каком это обычно принято в теории операторов (см. [36]). Не следует путать это понятие с понятием *гильбертова C^*-модуля.* Грубо говоря, гильбертов C^*-модуль — это банахов модуль M над C^*-алгеброй A, норма которого порождается A-значным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon M \times M \to A$. Как правило, гильбертов C^*-модуль не является гильбертовым пространством. Гильбертовы C^*-модули играют важную роль в некоммутативной геометрии, но в нашем курсе они нам не встретятся. О них можно почитать в книгах [19] и [27].

Гильбертовы модули над инволютивной банаховой алгеброй A образуют полную подкатегорию в A-mod, обозначаемую через A-Hmod. Аналогично определяется полная подкатегория $A\text{-}\mathsf{Hmod}_1 \subset A\text{-}\mathsf{mod}_1$.

Поскольку нам предстоит иметь дело в основном с унитальными модулями над унитальными алгебрами, мы не будем вводить специальных обозначений для категорий унитальных модулей. В дальнейшем для унитальной A символы A-mod, A-Hmod и т.д. будут обозначать категории левых *унитальных* банаховых (гильбертовых) A-модулей; к путанице это не приведет.

С точки зрения теории операторов, язык гильбертовых модулей удобен, в частности, по следующей причине. Напомним (см. теорему 6.7), что нормальные операторы в гильбертовых пространствах со спектром в заданном компакте $K \subset \mathbb{C}$ — это то же самое, что инволютивные унитальные представления алгебры $C(K)$, т.е. объекты категории $C(K)$-Hmod:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{нормальные операторы } T \\ \text{в гильбертовых} \\ \text{пространствах, такие,} \\ \text{что } \sigma(T) \subset K \end{array} \right\} \rightleftarrows \mathrm{Ob}(C(K)\text{-}\mathsf{Hmod}) = \mathrm{Ob}(C(K)\text{-}\mathsf{Hmod}_1) \tag{9.1}$$

Помимо объектов, в категориях гильбертовых $C(K)$-модулей есть морфизмы и, в частности, изоморфизмы. Оказывается, изоморфизмы гильбертовых $C(K)$-модулей нам уже встречались «под другим соусом»:

Упражнение 9.1. Пусть $S \in \mathscr{B}(H_1)$ и $T \in \mathscr{B}(H_2)$ — нормальные операторы, $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, содержащий их спектры, $U \colon H_1 \to H_2$ —

ограниченный оператор. Следующие условия эквивалентны:

1) U унитарен и осуществляет унитарную эквивалентность S и T, т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "S"] \arrow[d, "U"'] & H_1 \arrow[d, "U"] \\ H_2 \arrow[r, "T"] & H_2 \end{tikzcd}$$

коммутативна.

2) U — изоморфизм в $C(K)$-Hmod_1.

Таким образом,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{нормальные операторы}\\ S \in \mathscr{B}(H_1) \text{ и } T \in \mathscr{B}(H_2)\\ \text{унитарно эквивалентны}\end{array}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{H_1 \cong H_2 \text{ в } C(K)\text{-}\mathsf{Hmod}_1}$$

Посмотрим теперь на некоторые примеры банаховых и гильбертовых модулей.

Пример 9.1. Если A — (банахова) алгебра, то она очевидным образом является левым (банаховым) A-модулем относительно операции $a \cdot b = ab$.

Пример 9.2. Для любой алгебры A пространство $A^n = A \oplus \ldots \oplus A$ является левым A-модулем относительно операции $a \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (aa_1, \ldots, aa_n)$. Любой A-модуль, изоморфный A^n, называется *свободным конечно порожденным A-модулем.* Если A — банахова алгебра, то A^n — банахов A-модуль относительно нормы $\|(a_1, \ldots, a_n)\| = \sum_{i=1}^n \|a_i\|$ (разумеется, вместо $\sum_i$ можно брать $\max_i$ — получится эквивалентная норма). Отметим, что если X — компактное хаусдорфово топологическое пространство и $A = C(X)$, то A^n изоморфен модулю $C(X, \mathbb{C}^n)$ непрерывных функций на X со значениями в $\mathbb{C}^n$.

Пример 9.3. (Для любителей топологии). Пусть по-прежнему X — компактное пространство, $\pi\colon E \to X$ — векторное расслоение над X. Пространство его сечений

$$\Gamma(X, E) = \{f\colon X \to E : f \text{ непрерывно и } \pi \circ f = \mathbf{1}_X\}$$

является $C(X)$-модулем относительно поточечных операций. Известная теорема из топологии утверждает, что для любого расслоения E над X найдется расслоение F над X такое, что $E \oplus F$ тривиально, т.е. изоморфно расслоению вида $X \times \mathbb{C}^N$ для некоторого N. Поэтому

$$\Gamma(X, E) \oplus \Gamma(X, F) \cong \Gamma(X, X \times \mathbb{C}^N) \cong C(X, \mathbb{C}^N) \cong C(X)^N.$$

Модуль P над произвольной алгеброй A называется *проективным конечно порожденным* модулем, если он изоморфен прямому слагаемому свободного конечно порожденного A-модуля. Таким образом, $\Gamma(X, E)$ — проективный конечно порожденный $C(X)$-модуль. Знаменитая теорема Серра–Суона утверждает, что любой проективный конечно порожденный $C(X)$-модуль имеет такой вид; более того, *функтор сечений* Γ *осуществляет эквивалентность категории векторных расслоений над* X *и категории конечно порожденных проективных* $C(X)$-*модулей.* Эта теорема несет примерно ту же «идеологическую» нагрузку, что и первая теорема Гельфанда–Наймарка; в свое время (в 60-ых гг. прошлого века) она послужила стимулом для появления новой дисциплины — *алгебраической* K*-теории.*

Забегая вперед, скажем, что вскоре нам предстоит познакомиться с «измеримыми аналогами» модулей $\Gamma(X, E)$ — модулями «квадратично интегрируемых сечений измеримых полей гильбертовых пространств» или, по-другому, «прямыми интегралами гильбертовых пространств».

Пример 9.4. Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\mu \in M(X)$ — неотрицательная регулярная борелевская мера. Тогда пространство $L^2(X, \mu)$ является гильбертовым $C(X)$-модулем относительно поточечных операций.

Пример 9.5. Предыдущий пример можно обобщить следующим образом. Пусть по-прежнему X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $(\mathscr{X}, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $\varphi \colon \mathscr{X} \to X$ — измеримое отображение (относительно $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}or(X)$). Для каждой $f \in C(X)$ и каждой $g \in L^2(\mathscr{X}, \mu)$ определим $f \cdot g \in L^2(\mathscr{X}, \mu)$ формулой $(f \cdot g)(x) = f(\varphi(x))g(x)$. Тогда, как нетрудно проверить (проверьте!), $L^2(\mathscr{X}, \mu)$ становится гильбертовым $C(X)$-модулем. Мы будем обозначать его через $L^2(\mathscr{X}, \mu)_\varphi$.

Наша ближайшая цель — доказать, что других гильбертовых $C(X)$-модулей, кроме описанных в примере 9.5, не бывает.

9.2. Функциональная модель $*$-циклического оператора

Прежде чем приступать к решению задачи, сформулированной в конце предыдущего параграфа, мы разберемся с частным случаем — примером 9.4. Оказывается, он также описывает весьма широкий класс гильбертовых $C(X)$-модулей.

Определение 9.4. Пусть A — банахова алгебра, M — левый банахов A-модуль, $x \in M$. Замкнутый подмодуль

$$Ax = \overline{\{a \cdot x : a \in A\}}$$

называется *циклическим подмодулем*, порожденным элементом x. Если существует такой $x \in M$, что $M = Ax$, то M называется *циклическим модулем*, а x — *циклическим вектором* для M.

Пример 9.6. Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\mu \in M(X)$ — неотрицательная регулярная борелевская мера. Стандартная теорема из теории меры утверждает, что *канонический образ пространства $C(X)$ плотен в $L^2(X, \mu)$* (см., например, [15], где этот факт доказан в предположении метризуемости X). Поэтому гильбертов $C(X)$-модуль $L^2(X, \mu)$, описанный в примере 9.4, является циклическим: в качестве циклического вектора подойдет функция $x \equiv 1$.

Упражнение 9.2. Является ли циклическим гильбертов $C(X)$-модуль $L^2(X, \mu) \oplus L^2(X, \mu)$?

Оказывается, пример 9.6 описывает все (с точностью до изометрического изоморфизма) циклические гильбертовы $C(X)$-модули. Чтобы доказать это, введем некоторые обозначения.

Итак, пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство и H — гильбертов $C(X)$-модуль. Соответствующее $*$-представление $\pi \colon C(X) \to \mathscr{B}(H)$ канонически продолжается до $*$-представления $\tilde{\pi} \colon B(X) \to \mathscr{B}(H)$, непрерывного относительно слабо-мерной топологии на $B(X)$ и слабо-операторной топологии на $\mathscr{B}(H)$ (см. теорему 7.4). Разумеется, оно будет непрерывно и по норме (как и любое $*$-представление инволютивной банаховой алгебры; см. предложение 6.9). Поэтому H становится гильбертовым $B(X)$-модулем. Обозначим через $E \colon \mathscr{B}or(X) \to \mathrm{PR}(H)$ соответствующую регулярную спектральную меру (см. §8.2); напомним, что $E(B)x = \chi_B \cdot x$ для любого борелевского подмножества $B \subset X$ и любого $x \in H$. Зафиксируем $x \in H$ и определим меру $\mu_x \in M(X)$ формулой

$$\mu_x(B) = \langle E(B)x, x \rangle \qquad (B \in \mathscr{B}or(X)). \tag{9.2}$$

Иными словами, μ_x — это в точности мера $E_{x,x}$ из §8.1. Отметим, что $\mu_x(B) = \|E(B)x\|^2$, так что μ_x неотрицательна. Напомним также, что

$$\langle \tilde{\pi}(f)x, x \rangle = \int_X f \, d\mu_x \qquad (f \in B(X)) \tag{9.3}$$

(см. теорему 8.1 и определение 8.3).

В следующем предложении для любой μ_x-измеримой функции f на X символом $[f]$ мы будем обозначать ее класс эквивалентности относительно μ_x.

Предложение 9.1. *Существует единственный морфизм гильбертовых $C(X)$-модулей $j_x \colon L^2(X,\mu_x) \to H$ такой, что $j_x([1]) = x$. При этом j_x изометричен, и $\operatorname{Im} j_x = C(X)x$.*

Доказательство. Легко видеть, что каноническое отображение

$$B(X) \to L^2(X,\mu_x), \quad f \mapsto [f]$$

— морфизм банаховых $C(X)$-модулей. Обозначим через $B^2(X,\mu_x) \subset L^2(X,\mu_x)$ его образ. Ясно, что он является плотным подмодулем в $L^2(X,\mu_x)$ (объясните, почему).

Из формулы (9.3) следует, что

$$\langle \tilde\pi(f)x, \tilde\pi(g)x\rangle = \langle \tilde\pi(f\bar g)x, x\rangle = \int_X f\bar g\, d\mu_x \tag{9.4}$$

для любых $f,g \in B(X)$. Полагая $f = g$, мы видим, что если $f = 0$ μ_x-п.в., то $\tilde\pi(f)x = 0$. Следовательно, оператор

$$B(X) \to H, \quad f \mapsto \tilde\pi(f)x$$

«пропускается» через $B^2(X,\mu_x)$. Это означает, что существует единственный линейный оператор $j_x^0 \colon B^2(X,\mu_x) \to H$ такой, что $j_x^0([f]) = \tilde\pi(f)x$ для любой $f \in B(X)$. Очевидно, j_x^0 — морфизм $C(X)$-модулей; кроме того, из формулы (9.4) следует, что он изометричен. Следовательно, j_x^0 продолжается до изометрического морфизма $C(X)$-модулей $j_x \colon L^2(X,\mu_x) \to H$. Поскольку $[1]$ является циклическим вектором для $L^2(X,\mu_x)$, вектор $x = j_x([1])$ — циклический для $\operatorname{Im} j_x$. Отсюда же следует утверждение о единственности морфизма j_x. $\square$

В качестве следствия мы получаем теорему о функциональной модели циклического гильбертова $C(X)$-модуля.

Теорема 9.1. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство и H — циклический гильбертов $C(X)$-модуль. Тогда существует мера $\mu \in M(X)$, $\mu \geqslant 0$ такая, что H изоморфен $L^2(X,\mu)$ в $C(X)$-Hmod_1.*

Перейдем теперь от гильбертовых модулей к нормальным операторам.

Определение 9.5. Нормальный оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ называется *$*$-циклическим*, если существует $x \in H$ такой, что

$$H = \overline{\operatorname{span}}\{T^n (T^*)^m x : n, m \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Вектор x при этом называется *$*$-циклическим вектором* для T.

Замечание 9.2. Если в H существует такой оператор, то оно с необходимостью сепарабельно.

Упражнение 9.3. Нормальный оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ — $*$-циклический $\iff$ H — циклический гильбертов $C(\sigma(T))$-модуль.

С учетом вышеупомянутого соответствия между нормальными операторами и гильбертовыми модулями, мы получаем следующий результат.

Теорема 9.2. *Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — $*$-циклический нормальный оператор. Тогда существуют мера $\mu \in M(\sigma(T))$, $\mu \geqslant 0$ и унитарный оператор $U \colon H \to L^2(X, \mu)$, осуществляющий унитарную эквивалентность между T и оператором M_t умножения на «независимую переменную»:*

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "T"] \arrow[d, "U"'] & H \arrow[d, "U"] \\
L^2(\sigma(T), \mu) \arrow[r, "M_t"] & L^2(\sigma(T), \mu)
\end{tikzcd}$$

Здесь оператор M_t действует по формуле $(M_t f)(x) = x f(x)$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 9.1 и упражнениями 9.1 и 9.3. $\square$

Посмотрим на некоторые примеры.

Пример 9.7. (Ср. пример 9.6). Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, снабженный обычной мерой Лебега, $M_t \in \mathscr{B}(L^2(K))$ — оператор умножения на «независимую переменную». Тогда M_t — $*$-циклический, а функция $x \equiv 1$ — $*$-циклический вектор для M_t. Соответствующая мера μ_1 совпадает с мерой Лебега.

Пример 9.8. Оператор двустороннего сдвига $T_b \in \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ — $*$-циклический. Вектор $e_0 \in \ell^2(\mathbb{Z})$ (впрочем, как и любой другой вектор e_n из стандартного базиса $\ell^2(\mathbb{Z})$) — $*$-циклический для T_b.

Упражнение 9.4. В обозначениях предыдущего примера опишите меру μ_{e_0}.

Упражнение 9.5. Если нормальный оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ — $*$-циклический, то все его собственные значения однократны. Если H конечномерно, то верно и обратное.

Замечание 9.3. По этой причине $*$-циклические нормальные операторы иногда называют *операторами с простым спектром* или *операторами со спектром кратности* 1. Вскоре мы обсудим вопрос о кратности спектра в более общей ситуации.

Упражнение 9.6. При каких условиях диагональный оператор $M_\lambda \in \mathscr{B}(\ell^2)$ является $*$-циклическим?

Упражнение 9.7. При каких условиях операторы сдвига в $L^2(\mathbb{R})$ и $L^2(\mathbb{T})$ являются $*$-циклическими?

9.3. Функциональная модель: общий случай

Перейдем теперь к построению функциональной модели произвольного (т.е. уже не обязательно циклического) гильбертова $C(X)$-модуля. Напомним: мы хотим показать, что любой такой модуль изоморфен модулю, описанному в примере 9.5. Отсюда, в частности, будет следовать, что любой нормальный оператор в гильбертовом пространстве унитарно эквивалентен оператору умножения M_φ, действующему в пространстве вида $L^2(\mathscr{X}, \mu)$ по формуле $(M_\varphi f)(x) = \varphi(x)f(x)$; здесь $(\mathscr{X}, \mu)$ — некоторое пространство с мерой, а φ — ограниченная измеримая функция на $\mathscr{X}$. Основная идея построения будет такова: мы вначале разложим наш оператор (или гильбертов модуль) в сумму циклических, а затем «склеим» их функциональные модели в одну.

Отступление. Такой процесс построения функциональной модели — это применение следующего общего принципа: чтобы получше изучить какой-либо математический объект, надо разбить его на «элементарные кирпичики». Вот несколько других классических примеров такого рода: теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (любая такая группа — прямая сумма циклических), теорема о жордановой нормальной форме (любая матрица — прямая сумма жордановых клеток), теорема о представлениях конечных групп (любое представление — прямая сумма неприводимых)... (Можете продолжить этот список своими любимыми примерами). Во всех перечисленных примерах речь идет о разложении того или иного модуля в прямую сумму подмодулей: в первом случае — над кольцом $\mathbb{Z}$, во втором — над $\mathbb{C}[t]$, в третьем — над групповой алгеброй $\mathbb{C}G$. В первых двух случаях подмодули циклические, а в третьем (благодаря некоторым хорошим свойствам алгебры $\mathbb{C}G$) их удается выбрать даже неприводимыми. С гильбертовыми модулями, как мы вскоре увидим, ситуация такова: любой гильбертов $C(X)$-модуль разлагается в прямую сумму циклических (но не неприводимых!) подмодулей. Для разложения на неприводимые подмодули нам в следующей главе придется использовать уже не прямые суммы, а так называемые прямые интегралы.

* * *

Итак, мы хотим разложить произвольный нормальный оператор в прямую сумму циклических. Для начала придадим фразе «разложить в прямую сумму» строгий смысл.

Замечание 9.4. Ниже нам придется иметь дело с рядами вида $\sum_{i\in I} x_i$, где I — множество произвольной мощности и $x_i \in \mathbb{C}$. Сделаем в связи с этим несколько замечаний. Мы будем говорить, что такой ряд абсолютно сходится, если множество $J = \{i \in I : x_i \neq 0\}$ не более чем счетно, и ряд $\sum_{i\in J} |x_i|$ сходится при какой-либо ($\iff$ при любой) нумерации множества J. При этом мы полагаем по определению $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in J} x_i$; эта сумма также не зависит от нумерации J.

Пусть $\{H_i\}_{i\in I}$ — некоторое семейство гильбертовых пространств.

Определение 9.6. *Гильбертова прямая сумма* семейства $\{H_i\}_{i\in I}$ определяется следующим образом:

$$\dot{\bigoplus_{i\in I}} H_i = \Big\{x = (x_i) \in \prod_{i\in I} H_i : \sum_{i\in I} \|x_i\|^2 < \infty\Big\}.$$

Упражнение 9.8. Гильбертова прямая сумма $H = \dot{\bigoplus}_{i\in I} H_i$ является векторным подпространством в $\prod_{i\in I} H_i$. Для любых $x, y \in H$ ряд $\sum_{i\in I} \langle x_i, y_i\rangle$ абсолютно сходится, и формула $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i\rangle$ задает скалярное произведение в H, относительно которого H является гильбертовым пространством.

Замечание 9.5. Для каждого $i \in I$ пространство H_i очевидным образом вкладывается в H в качестве замкнутого подпространства. В дальнейшем мы будем отождествлять H_i с его образом в H и считать, что $H_i \subset H$.

Пример 9.9. Если $I = \mathbb{N}$ и $H_i = \mathbb{C}$ для всех $i \in I$, то $\dot{\bigoplus}_{i\in I} H_i = \ell^2$. Для произвольного I мы получаем пространство, которое по понятной причине обозначается через $\ell^2(I)$.

Теперь перейдем от пространств к операторам.

Упражнение 9.9. Пусть для каждого $i \in I$ задан ограниченный оператор $T_i \in \mathscr{B}(H_i)$, причем $\sup_i \|T_i\| < \infty$. Тогда формула $T(x) = (T_i x_i)_{i \in I}$ (где $x = (x_i)_{i \in I} \in \dot{\bigoplus}_{i \in I} H_i$) задает ограниченный оператор T в $\dot{\bigoplus}_{i \in I} H_i$. При этом $\|T\| = \sup_i \|T_i\|$.

Определение 9.7. Оператор T, определенный в предыдущем упражнении, называется *гильбертовой прямой суммой* семейства операторов $\{T_i\}_{i \in I}$ и обозначается через $\dot{\bigoplus}_{i \in I} T_i$.

Пример 9.10. Если $I = \mathbb{N}$ и $H_i = \mathbb{C}$ для всех $i \in I$, то $\dot{\bigoplus}_{i \in I} T_i$ — это просто диагональный оператор M_λ в ℓ^2.

Прежде чем определять гильбертовы прямые суммы гильбертовых модулей, докажем простую лемму.

Лемма 9.1. *Пусть A — унитальная инволютивная банахова алгебра, H — левый унитальный гильбертов A-модуль. Тогда $\|a \cdot x\| \leqslant \leqslant \|a\| \|x\|$ для любых $a \in A$, $x \in H$.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться тем фактом, что представление унитальной инволютивной банаховой алгебры не увеличивает норму (см. предложение 6.9). □

Объединяя эту лемму с упражнением 9.9, получаем следующее

Предложение 9.2. *Пусть A — унитальная инволютивная банахова алгебра, $\{H_i\}_{i \in I}$ — семейство левых унитальных гильбертовых A-модулей. Тогда их гильбертова прямая сумма $\dot{\bigoplus}_{i \in I} H_i$ является левым унитальным гильбертовым A-модулем относительно операции $a \cdot (x_i)_{i \in I} = (a \cdot x_i)_{i \in I}$.*

В случае, когда все H_i-ые лежат в одном общем H, операция гильбертовой прямой суммы сводится к взятию замкнутой линейной оболочки:

Упражнение 9.10. Пусть A — унитальная инволютивная банахова алгебра, H — левый унитальный гильбертов A-модуль, $\{H_i\}_{i \in I}$ — семейство попарно ортогональных замкнутых подмодулей в H. Тогда существует единственный морфизм $U \colon \dot{\bigoplus}_{i \in I} H_i \to H$ в A-Hmod такой, что $Ux = x$ для любого $x \in H_i$ и любого $i \in I$. При этом U изометричен, и $\operatorname{Im} U = \overline{\sum_{i \in I} H_i}$ (замыкание алгебраической суммы).

Приступим теперь к разложению гильбертова модуля в сумму циклических. Ключевую роль здесь играет следующая простая лемма:

Лемма 9.2. *Пусть A — инволютивная банахова алгебра, H — левый гильбертов A-модуль, $H_0 \subset H$ — замкнутый подмодуль. Тогда и $H_0^\perp$ — подмодуль.*

Доказательство. Если $x \in H_0^\perp$ и $a \in A$, то для любого $y \in H_0$ мы имеем $\langle a \cdot x, y \rangle = \langle x, a^* \cdot y \rangle = 0$. Следовательно, $a \cdot x \in H_0^\perp$. $\square$

Предложение 9.3. *Пусть A — унитальная инволютивная банахова алгебра, H — левый унитальный гильбертов A-модуль. Тогда существует семейство $\{H_i\}_{i \in I}$ замкнутых попарно ортогональных циклических подмодулей в H, такое, что $H = \overline{\sum_{i \in I} H_i}$. Как следствие, H изоморфен $\dot{\bigoplus}_{i \in I} H_i$ в A-Hmod_1.*

Доказательство. Пусть M — множество, состоящее из всевозможных наборов ненулевых попарно ортогональных замкнутых циклических подмодулей в H. Это множество частично упорядочено по включению. Легко видеть, что M удовлетворяет условиям леммы Цорна. Действительно, если $C \subset M$ линейно упорядочено, то набор $\alpha = \bigcup \{\beta : \beta \in C\}$ является элементом M и не меньше любого элемента из C. Следовательно, в M есть максимальный элемент $\gamma = \{H_i\}_{i \in I}$. Положим $H_0 = \overline{\sum_{i \in I} H_i}$ и покажем, что $H_0 = H$. Если это не так, то $H_0^\perp \neq 0$, и $H_0^\perp$ — подмодуль в H по предыдущей лемме. Выберем произвольный ненулевой $x \in H_0^\perp$; тогда $Ax \subset H_0^\perp$ — ненулевой замкнутый циклический подмодуль, ортогональный всем H_i-ым. Это противоречит максимальности набора γ. Следовательно, $H_0 = H$, как и требовалось. $\square$

Вместе с теоремой 9.1 это приводит к следующему результату:

Теорема 9.3. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, H — левый унитальный гильбертов $C(X)$-модуль. Тогда существует семейство $\{\mu_i\}_{i \in I}$ неотрицательных регулярных борелевских мер на X такое, что H изоморфен гильбертовой прямой сумме $\dot{\bigoplus}_{i \in I} L^2(X, \mu_i)$ в $C(X)$-Hmod.*

В качестве следствия мы получаем соответствующий результат об операторах:

Теорема 9.4. *Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор. Тогда существует семейство $\{\mu_i\}_{i \in I}$ неотрицательных регулярных борелевских мер на $\sigma(T)$ такое, что T унитарно эквивалентен опера-*

тору $\dot{\bigoplus}_{i\in I} M_t^{\mu_i}$, *где для каждого* $i \in I$ *оператор* $M_t^{\mu_i}$ *действует в* $L^2(\sigma(T),\mu_i)$ *по формуле* $(M_t^{\mu_i} f)(z) = zf(z)$.

Доказательство. Достаточно превратить H в гильбертов $C(\sigma(T))$-модуль (см. (9.1)) и применить предыдущую теорему. □

Теорема 9.4 дает важную информацию о строении нормального оператора. Однако у нее есть один существенный недостаток: разложение T в сумму операторов умножения $M_t^{\mu_i}$, вообще говоря, неединственно. В частности, один «элементарный кирпичик» $M_t^{\mu_i}$ вполне может оказаться суммой двух других:

Упражнение 9.11. Постройте ненулевые регулярные борелевские меры μ, ν_1, ν_2 на каком-нибудь компакте $K \subset \mathbb{C}$ так, чтобы оператор $M_t^{\mu} \in \mathscr{B}(L^2(K),\mu)$ был унитарно эквивалентен оператору $M_t^{\nu_1} \dot{\oplus} M_t^{\nu_2}$.

Замечание 9.6. Впоследствии мы увидим, что разложение, указанное в теореме 9.4, все же единственно, если слагаемые должным образом сгруппировать и упорядочить.

Обсудим теперь одну общую алгебраическую конструкцию. Пусть A и B — банаховы алгебры, $\psi\colon A \to B$ — непрерывный гомоморфизм. Каждый левый банахов B-модуль M можно тогда рассматривать и как левый банахов A-модуль, полагая $a \cdot x = \psi(a) \cdot x$ для $a \in A$, $x \in M$. Если $u\colon M \to N$ — морфизм в B-mod, то он же будет морфизмом и в A-mod относительно только что введенного действия A на M и N. Тем самым определен ковариантный функтор $\psi^{\#}\colon B\text{-}\mathsf{mod} \to A\text{-}\mathsf{mod}$. Он называется *функтором отступления* вдоль ψ или *функтором прямого образа*.

Название «функтор прямого образа» может показаться несколько неожиданным — ведь, в то время как гомоморфизм ψ действует из A в B, функтор $\psi^{\#}$ действует из B-mod в A-mod (а вовсе не наоборот). Эта терминология оправдывается тем, что при переходе от пространств к алгебрам функций на них стрелки обращаются (т.е. функтор «пространство $\mapsto$ алгебра функций» контравариантен; см. §5.5). Вот типичный для дальнейшего пример.

Пример 9.11. Пусть $(\mathscr{X},\mathscr{A},\mu)$ — пространство с мерой, X — компактное топологическое пространство, $\varphi\colon \mathscr{X} \to X$ — измеримое отображение (относительно $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}or(X)$). Определим гомоморфизм $\varphi^\bullet\colon C(X) \to L^\infty(\mathscr{X},\mu)$ формулой $\varphi^\bullet(f) = f \circ \varphi$. Он, в свою очередь, задает функтор $(\varphi^\bullet)^{\#}\colon L^\infty(\mathscr{X},\mu)\text{-}\mathsf{mod} \to C(X)\text{-}\mathsf{mod}$. Если применить этот функтор к $L^2(\mathscr{X},\mu)$ (которое очевидным образом наделяется структурой модуля над $L^\infty(\mathscr{X},\mu)$), мы получим $C(X)$-модуль $L^2(\mathscr{X},\mu)_\varphi$ (см. пример 9.5).

Теорема 9.5 (о функциональной модели). *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, H — левый гильбертов $C(X)$-модуль. Тогда существуют пространство с мерой $(\mathscr{X},\mathscr{A},\mu)$ и измеримое отображение $\varphi\colon \mathscr{X}\to X$ такие, что H изоморфен $L^2(\mathscr{X},\mu)_\varphi$ в $C(X)$-Hmod_1.*

Доказательство. Представим H в виде, указанном в теореме 9.3, и рассмотрим дизъюнктное объединение $\mathscr{X}=\bigsqcup_{i\in I}X_i$, где $X_i=X$ для всех $i\in I$. Определим σ-алгебру $\mathscr{A}\subset 2^{\mathscr{X}}$ и меру $\mu\colon\mathscr{A}\to[0,+\infty]$ следующим образом:

$$\mathscr{A}=\Big\{\bigsqcup_{i\in I}B_i : B_i\in\mathscr{B}or(X_i)\Big\},$$

$$\mu\Big(\bigsqcup_{i\in I}B_i\Big)=\begin{cases}\sum_{i\in I}\mu_i(B_i), & \text{если этот ряд сходится}\\ +\infty & \text{иначе}\end{cases}$$

Наконец, определим измеримое отображение $\varphi\colon \mathscr{X}\to X$, полагая $\varphi(x)=$ $=x$ для любого $x\in X_i$ и любого $i\in I$.

Чтобы построить изоморфизм между H и $L^2(\mathscr{X},\mu)_\varphi$, для каждого $i\in I$ рассмотрим замкнутый подмодуль

$$H_i=\{f\in L^2(\mathscr{X},\mu)_\varphi : f=0 \ \text{ п.в. вне } X_i\}.$$

Ясно, что $H_i\perp H_j$ при $i\neq j$. Кроме того, отображение $U_i\colon L^2(X,\mu_i)\to$ $\to H_i$, сопоставляющее каждой $f\in L^2(X,\mu_i)$ ее продолжение нулем вне X_i, является, очевидно, изоморфизмом в $C(X)$-Hmod_1. С учетом упражнения 9.10, мы получаем изометрический морфизм $U\colon \dot{\bigoplus}_{i\in I}L^2(X,\mu_i)\to$ $\to L^2(\mathscr{X},\mu)_\varphi$, ограничение которого на каждое $L^2(X,\mu_i)$ совпадает с U_i, а образ есть $\overline{\sum_{i\in I}H_i}$. Осталось заметить, что U сюръективен. В самом деле, если $f\in L^2(\mathscr{X},\mu)$ и $f\perp H_i$, то $f=0$ п.в. на X_i. Если же это так для всех $i\in I$, то $f=0$ п.в. на $\mathscr{X}$. Следовательно, $(\operatorname{Im}U)^\perp=0$, и U — изометрический изоморфизм. □

На языке операторов последняя теорема звучит так:

Теорема 9.6 (о функциональной модели). *Пусть $T\in\mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор. Тогда существуют пространство с мерой $(\mathscr{X},\mathscr{A},\mu)$ и измеримая ограниченная функция $\varphi\colon\mathscr{X}\to\mathbb{C}$ такие, что T унитарно эквивалентен оператору умножения $M_\varphi\in\mathscr{B}(L^2(\mathscr{X},\mu))$, действующему по формуле $(M_\varphi f)(x)=\varphi(x)f(x)$.*

Упражнение 9.12. Если H сепарабельно, а T самосопряжен, то в качестве $\mathscr{X}$ можно взять $\mathbb{R}$, а меру μ выбрать конечной.

Теорема о функциональной модели — чрезвычайно мощное средство, позволяющее «задаром» получать содержательную информацию о нормальных операторах. Например, чтобы определить борелевское исчисление от нормального оператора T, достаточно представить T в виде $U^{-1}M_\varphi U$ (где U — оператор, осуществляющий эквивалентность между T и M_φ), и положить $f(T) = U^{-1}M_{f\circ\varphi}U$. Точно так же можно построить разложение единицы T (см. упр. 7.15 и 8.7).

Вот еще одно приложение.

Упражнение 9.13. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный необратимый оператор.

1) Докажите, что $\operatorname{Im} T$ замкнут $\iff$ 0 — изолированная точка $\sigma(T)$.

2) Верно ли предыдущее утверждение для ненормальных операторов? Верна ли хотя бы одна из импликаций "$\Longrightarrow$" или "$\Longleftarrow$"?

9.4. L^∞-функциональное исчисление. Скалярная спектральная мера

Вернемся теперь к нашему основному вопросу о функциональных исчислениях. Мы уже убедились на многочисленных примерах, что чем больше запас функций, которые можно применять к линейному оператору, тем больше можно сказать о его строении. Как мы уже знаем, от нормального оператора в гильбертовом пространстве можно брать любые ограниченные борелевские функции, определенные на его спектре (см. главу 7). По сути дела, именно этот факт и позволил нам доказать спектральную теорему в ее различных формулировках. Естественно теперь поинтересоваться, можно ли от нормального оператора брать *неограниченные* борелевские функции. Оказывается, действительно можно, но если мы при этом хотим оставаться в рамках теории ограниченных операторов, то наши функции должны быть *существенно ограниченными* по отношению к некоторой специальной мере. Наша ближайшая цель — определить эту меру и построить соответствующее L^∞-функциональное исчисление.

Пусть $(X, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство с мерой. Напомним, что существует изометрический изоморфизм

$$L^\infty(X,\mu) \to (L^1(X,\mu))^*, \quad f \mapsto F_f, \quad \text{где} \quad F_f(g) = \int_X fg\, d\mu \quad \forall g \in L^1(X,\mu).$$

Как следствие, на $L^\infty(X,\mu)$ возникает слабая* топология $\sigma(L^\infty, L^1)$ (см. §5.2).

Упражнение 9.14. Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\mu \in M(X)$ — неотрицательная регулярная борелевская мера.

1) Покажите, что образ канонического гомоморфизма $C(X) \to \to L^\infty(X,\mu)$, переводящего каждую функцию в ее класс эквивалентности относительно μ, плотен в слабой* топологии.

2) Покажите, что канонический гомоморфизм $B(X) \to L^\infty(X,\mu)$ непрерывен относительно слабо-мерной топологии на $B(X)$ и слабой* топологии на $L^\infty(X,\mu)$.

Пусть теперь $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор, $K \subset \mathbb{C}$ — компактное подмножество, $\mu \in M(K)$ — неотрицательная регулярная борелевская мера. Как обычно, через $t \in L^\infty(K,\mu)$ мы обозначаем функцию $t(z) = z$ $(z \in K)$ — точнее, ее класс эквивалентности.

Определение 9.8. L^∞*-функциональным исчислением* от T на (K,μ) называется унитальный $*$-гомоморфизм $\gamma_\infty\colon L^\infty(K,\mu) \to \mathscr{B}(H)$, непрерывный относительно слабой* топологии на $L^\infty(K,\mu)$ и слабо-операторной топологии на $\mathscr{B}(H)$ и такой, что $\gamma_\infty(t) = T$.

Упражнение 9.15. Предположим, что L^∞-функциональное исчисление от T на (K,μ) существует. Тогда:

1) оно единственно;

2) $\sigma(T) \subset K$;

3) диаграмма

$$\begin{tikzcd} B(K) \arrow[r, "\gamma_b"] \arrow[d] & \mathscr{B}(H) \\ L^\infty(K,\mu) \arrow[ur, "\gamma_\infty"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна. (Здесь γ_b — борелевское исчисление от T, а вертикальная стрелка — канонический гомоморфизм; см. упр. 9.14).

Если про меру μ ничего не известно, то соответствующего L^∞-функционального исчисления может и не существовать (приведите пример!). Наша задача будет состоять в том, чтобы по заданному оператору T построить некоторую специальную меру μ на $\sigma(T)$, для которой L^∞-функциональное исчисление от T существует. Она называется *скалярной спектральной мерой* оператора T. Строить ее мы будем в более общем контексте гильбертовых модулей.

Итак, пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, H — унитальный гильбертов $C(X)$-модуль, $\pi\colon C(X) \to \mathscr{B}(H)$

и $\tilde\pi\colon B(X)\to\mathscr{B}(H)$ — соответствующие представления, $E\colon \mathscr{B}or(X)\to$ $\to \mathrm{PR}(H)$ — соответствующая спектральная мера (см. теорему 8.3).

Определение 9.9. Неотрицательная мера $\mu\in M(X)$ называется *скалярной спектральной мерой* для H, если для $B\in\mathscr{B}or(X)$ условия $E(B)=0$ и $\mu(B)=0$ эквивалентны.

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые факты из теории меры.

Отступление: напоминания из теории меры

Пусть X — множество, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств.

Определение 9.10. Пусть μ,ν — σ-аддитивные комплексные меры на $\mathscr{A}$, $\nu\geqslant 0$.

1) Говорят, что μ *абсолютно непрерывна относительно* ν, если из $\nu(A)=0$, $A\in\mathscr{A}$ следует, что $\mu(A)=0$. При этом пишут $\mu\ll\nu$.

2) Если $\mu\geqslant 0$, то говорят, что μ и ν *эквивалентны* (и пишут $\mu\sim\nu$), если одновременно $\mu\ll\nu$ и $\nu\ll\mu$, т.е. если для $A\in\mathscr{A}$ условия $\nu(A)=0$ и $\mu(A)=0$ эквивалентны.

Теорема 9.7 (Радон, Никодим). *Пусть μ,ν — σ-аддитивные комплексные меры на σ-алгебре $\mathscr{A}$, причем $\nu\geqslant 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mu\ll\nu$;

(ii) *существует ν-интегрируемая функция $\rho\colon X\to\mathbb{C}$ такая, что $\mu(A)=\int_A\rho\,d\nu$ для любого $A\in\mathscr{A}$ (т.е., в обозначениях главы 7, $\mu=\rho\cdot\nu$);*

(iii) *для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любого $A\in\mathscr{A}$, удовлетворяющего условию $\nu(A)<\delta$, выполнено $|\mu|(A)<\varepsilon$.*

При этом, если $\mu\geqslant 0$, то и $\rho\geqslant 0$ ν-п.в. Класс эквивалентности функции ρ (относительно ν) определен однозначно. Функция ρ обозначается $\dfrac{d\mu}{d\nu}$ и называется производной Радона–Никодима *μ по ν (или* плотностью *μ относительно ν).*

Замечание 9.7. На самом деле, теорема Радона–Никодима — это импликация (i)$\Rightarrow$(ii) в предыдущем утверждении. Импликация (ii)$\Rightarrow$(iii) — это так называемое *свойство абсолютной непрерывности интеграла*, а импликация (iii)$\Rightarrow$(i) очевидна.

* * *

Вернемся к гильбертовым модулям. Прежде чем строить скалярную спектральную меру, заметим, что если она существует, то она определена однозначно с точностью до эквивалентности.

Для построения скалярной спектральной меры нам будет удобно воспользоваться следующим общим понятием.

Определение 9.11. Вектор $x \in H$ называется *отделяющим* для представления $\tilde{\pi}$, если для $f \in B(X)$ из $\tilde{\pi}(f)x = 0$ следует, что $\tilde{\pi}(f) = 0$.

Предложение 9.4. *Если вектор $x \in H$ — отделяющий, то мера μ_x (см. (9.2)) является скалярной спектральной мерой для H.*

Доказательство. Напомним, что $\mu_x(B) = \|E(B)x\|^2$ для любого борелевского $B \subset X$. Поэтому $\mu_x(B) = 0 \iff E(B)x = 0 \iff E(B) = = 0$. $\square$

Упражнение 9.16. Докажите, что верно и обратное утверждение.

Итак, вопрос о существовании скалярной спектральной меры свелся к вопросу о существовании отделяющего вектора.

Предложение 9.5. *Если H сепарабелен, то в нем существует отделяющий вектор. Как следствие, существует скалярная спектральная мера для H.*

Доказательство. Представим H в виде $H = \overline{\sum_{i \in I} H_i}$, где H_i — попарно ортогональные циклические подмодули в H (см. предложение 9.3). Из сепарабельности H следует, что I не более чем счетно, поэтому мы можем считать, что $I = \mathbb{N}$ или $I = \{1, \dots, n\}$. Для каждого $i \in I$ выберем циклический вектор $x_i \in H_i$, $\|x_i\| = 1$, и положим $x = \sum_i \frac{x_i}{2^i}$. Легко видеть, что x — отделяющий вектор. Действительно, если $\tilde{\pi}(f)x = 0$ для некоторой $f \in B(X)$, то из ортогональности H_i-ых следует, что $\tilde{\pi}(f)x_i = 0$ для всех $i \in I$. Поскольку x_i — циклический вектор для H_i, отсюда следует, что $\tilde{\pi}(f)|_{H_i} = 0$ для всех $i \in I$, т.е. $\tilde{\pi}(f) = 0$. Следовательно, x — отделяющий вектор. $\square$

Естественно спросить: а существуют ли какие-нибудь другие скалярные спектральные меры для H, кроме тех, которые указаны в предложении 9.4? Проще всего ответить на этот вопрос в случае сепарабельного H:

Упражнение 9.17. Предположим, что в H существует отделяющий вектор x (это заведомо так, если H сепарабельно).

1) Если $\nu \in M(X)$, $\nu \geqslant 0$ и $\nu \ll \mu_x$, то $\nu = \mu_y$ для некоторого $y \in H$.

2) Любая скалярная спектральная мера для H имеет вид μ_y для некоторого (возможно, другого) отделяющего вектора $y \in H$.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Радона–Никодима.

На самом деле, в условии предыдущего упражнения можно и не требовать наличия отделяющего вектора:

Упражнение 9.18*. Следующие условия эквивалентны:

1) в H существует отделяющий вектор;
2) существует скалярная спектральная мера для H.

При этом любая скалярная спектральная мера для H имеет вид μ_y для некоторого отделяющего вектора $y \in H$.

Указание. Ключевой момент — следующее утверждение из теории меры: если некая мера μ эквивалентна семейству мер $\{\mu_i : i \in I\}$ в том смысле, что $\mu(B) = 0 \iff \mu_i(B) = 0 \, \forall i \in I$, то она эквивалентна не более чем счетному его подсемейству.

Так или иначе, но в общем случае (т.е. для несепарабельного H) предложение 9.5 перестает быть верным:

Упражнение 9.19. Постройте нормальный оператор в несепарабельном гильбертовом пространстве, не обладающий скалярной спектральной мерой.

Указание. Если σ-аддитивная мера $\mu \geqslant 0$ такова, что $\mu(\{x\}) > 0$ для любого $x \in X$, то $\mu(X \setminus S) = 0$ для некоторого не более чем счетного подмножества $S \subset X$.

Перейдем теперь к построению L^∞-функционального исчисления.

Предложение 9.6. *Пусть μ — скалярная спектральная мера для H. Тогда*

$$\operatorname{Ker} \tilde\pi = \{f \in B(X) : f = 0 \; \mu_x\text{-}\textit{п.в.} \; \forall x \in H\} = \{f \in B(X) : f = 0 \; \mu\text{-}\textit{п.в.}\}.$$

Доказательство. Для любого борелевского $B \subset X$ имеем

$$\mu(B) = 0 \iff E(B) = 0 \iff \|E(B)x\|^2 = 0 \, \forall x \in H \iff \mu_x(B) = 0 \, \forall x \in H.$$

Отсюда следует совпадение второго и третьего множеств. Совпадение первых двух множеств следует из равенства $\|\tilde\pi(f)x\|^2 = \int_X |f|^2 d\mu_x$. $\square$

Прежде чем формулировать и доказывать основную теорему, сделаем одно несложное наблюдение об инволютивных алгебрах.

Определение 9.12. Пусть A — инволютивная алгебра. Двусторонний идеал $I \subset A$ называется *$*$-идеалом*, если для любого $a \in I$ выполнено $a^* \in I$.

Упражнение 9.20. Если I — двусторонний $*$-идеал в инволютивной алгебре A, то факторалгебра A/I является инволютивной алгеброй относительно инволюции $(a+I)^* = a^* + I$. Если A — инволютивная банахова алгебра, то A/I, снабженная факторнормой и только что введенной инволюцией, тоже является инволютивной банаховой алгеброй.

Теорема 9.8. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, H — сепарабельное гильбертово пространство, $\pi\colon C(X) \to \mathscr{B}(H)$ — унитальный $*$-гомоморфизм, $\tilde{\pi}$ — его каноническое продолжение на $B(X)$, $\mu \in M(X)$ — соответствующая скалярная спектральная мера. Тогда существует единственный $*$-гомоморфизм $\pi_\infty\colon L^\infty(X,\mu) \to \mathscr{B}(H)$, делающий следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{tikzcd} B(X) \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d] & \mathscr{B}(H) \\ L^\infty(X,\mu) \arrow[ur, "\pi_\infty"'] & \end{tikzcd}$$

При этом π_∞ инъективен и непрерывен относительно слабой* топологии на $L^\infty(X,\mu)$ и слабо-операторной топологии на $\mathscr{B}(H)$.

Доказательство. Единственность π_∞ очевидна; докажем его существование. Положим $I_0 = \operatorname{Ker}\tilde{\pi}$; ясно, что это замкнутый $*$-идеал в $B(X)$. Рассмотрим линейный оператор

$$\pi_\infty\colon B(X)/I_0 \to \mathscr{B}(H), \quad f + I_0 \mapsto \tilde{\pi}(f).$$

Легко видеть, что π_∞ ограничен, инъективен и является $*$-гомоморфизмом. С учетом предложения 9.6, существует изометрический $*$-изоморфизм $B(X)/I_0 \to L^\infty(X,\mu)$, переводящий $f + I_0$ в класс эквивалентности функции f относительно μ (см. упражнение 2.11). Отождествляя алгебры $B(X)/I_0$ и $L^\infty(X,\mu)$, получаем искомый гомоморфизм $\pi_\infty\colon L^\infty(X,\mu) \to \mathscr{B}(H)$.

Для доказательства непрерывности π_∞ относительно указанных топологий достаточно по заданным $x, y \in H$ подобрать $\rho \in L^1(X,\mu)$ так, чтобы

$$\|\pi_\infty(f)\|_{x,y} \leqslant \|f\|_\rho \qquad \text{для любой} \quad f \in L^\infty(X,\mu). \tag{9.5}$$

Итак, пусть $x, y \in H$. Тогда

$$\|\pi_\infty(f)\|_{x,y} = |\langle \tilde{\pi}(f)x, y\rangle| = \left| \int_X f\, dE_{x,y} \right| \tag{9.6}$$

(здесь мы, как обычно, использовали один и тот же символ f для обозначения функции и ее класса эквивалентности). Из определения скалярной спектральной меры легко следует, что $E_{x,y} \ll \mu$. Положим $\rho = dE_{x,y}/d\mu$; тогда из (9.6) получаем, что

$$\|\pi_\infty(f)\|_{x,y} = \left| \int_X f\rho\, d\mu \right| = \|f\|_\rho,$$

что доказывает (9.5). Тем самым теорема доказана. □

Упражнение 9.21. Докажите, что π_∞ изометрично.

Предыдущее упражнение нетрудно сделать «в лоб», но можно и вывести его из следующего более общего утверждения:

Упражнение 9.22*. Пусть A, B — унитальные C^*-алгебры, $\varphi\colon A \to B$ — инъективный унитальный $*$-гомоморфизм. Тогда φ изометричен.

Естественно поинтересоваться: а нельзя ли вместо скалярной спектральной меры в предыдущей теореме взять какую-нибудь другую?

Упражнение 9.23. Какой должна быть мера $\mu \in M(X)$, $\mu \geqslant 0$, чтобы для нее было справедливо заключение теоремы 9.8? (Найдите необходимое и достаточное условие.)

В применении к операторам теорема 9.8 дает следующее:

Теорема 9.9. *Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, содержащий $\sigma(T)$, $\mu \in M(K)$ — скалярная спектральная мера оператора T. Тогда L^∞-функциональное исчисление от T на (K, μ) существует и единственно. Кроме того, оно изометрично.*

Посмотрим теперь на свойства L^∞-функционального исчисления. Естественно ожидать, что L^∞-функциональные исчисления на разных компактах должны быть согласованы (ср. упр. 7.17). Чтобы это утверждение имело смысл, согласованы должны быть и скалярные спектральные меры. Для точной формулировки этого результата введем следующее понятие.

Определение 9.13. Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство. *Носитель* меры $\mu \in M(X)$ — это подмножество $\operatorname{supp}\mu \subset X$, определяемое следующим образом:

$$x \notin \operatorname{supp}\mu \iff \exists \text{ окрестность } U \ni x : \mu(U) = 0.$$

Очевидно, $\operatorname{supp}\mu$ — замкнутое множество.

Замечание 9.8. Существует понятие носителя меры, заданной на произвольной σ-алгебре подмножеств любого множества, однако в этом случае носитель определен, вообще говоря, неоднозначно («носитель с неопределенным артиклем»). Носитель, определенный выше, естественно называть «топологическим носителем».

Упражнение 9.24. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, μ — его скалярная спектральная мера, определенная на некотором компакте $K \supset \sigma(T)$. Тогда $\operatorname{supp}\mu = \sigma(T)$.

Следствие 9.1. *Пусть $K, K_1 \subset \mathbb{C}$ — компакты, $\sigma(T) \subset K_1 \subset K$, и $\mu \in M(K)$ — скалярная спектральная мера для $T \in \mathscr{B}(H)$. Тогда ее ограничение $\mu|_{\mathscr{B}or(K_1)} \in M(K_1)$ также является скалярной спектральной мерой для T.*

Упражнение 9.25. В условиях предыдущего следствия обозначим через γ_∞^K и $\gamma_\infty^{K_1}$ L^∞-исчисления от T на K и K_1 соответственно, а через $r_{KK_1} : L^\infty(K,\mu) \to L^\infty(K_1,\mu)$ — гомоморфизм ограничения. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
L^\infty(K,\mu) \arrow[dr, "\gamma_\infty^K"] \arrow[dd, "r_{KK_1}"'] & \\
& \mathscr{B}(H) \\
L^\infty(K_1,\mu) \arrow[ur, "\gamma_\infty^{K_1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Поскольку L^∞-функциональное исчисление согласовано с борелевским (см. упражнение 9.15) и не зависит от выбора компакта $K \supset \supset \sigma(T)$, мы можем вместо $\gamma_\infty(f)$ использовать традиционное обозначение $f(T)$ — как и для других встречавшихся нам ранее функциональных исчислений.

Еще одно важное свойство L^∞-функционального исчисления, которого нет у борелевского исчисления — это теорема об отображении спектра:

Упражнение 9.26 (теорема об отображении спектра). Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, μ — его скалярная спектральная мера, определенная на некотором компакте $K \supset \sigma(T)$. Тогда для любой $f \in L^\infty(K, \mu)$ справедливо равенство

$$\sigma(f(T)) = \{ \text{ множество существенных значений } f \text{ на } \sigma(T) \}.$$

Литературные указания

О банаховых и гильбертовых модулях можно прочитать в [29]. Язык гильбертовых модулей широко используется в современной теории операторов; см. по этому поводу книгу Р. Дугласа и В. Полсена [36]. Упомянутая мимоходом теорема Серра–Суона доказана, например, в лекциях М. Атьи [1]. Теорему о функциональной модели самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве можно найти в [30, 14, 23]; на случай нормальных операторов и гильбертовых $C(X)$-модулей она обобщается без труда. Доказательство теоремы Радона–Никодима содержится в [15, 14, 9]. По поводу скалярных спектральных мер и L^∞-исчисления см. учебник Дж. Конвея [35].

10. ТЕОРИЯ КРАТНОСТИ

Вы, конечно, знаете, что кратностью собственного значения λ линейного оператора T называется размерность пространства $\operatorname{Ker}(T-\lambda\mathbf{1})$. Что следует называть кратностью точки спектра в общем случае? Теория кратности, с которой мы познакомимся в этой главе, дает ответ на этот вопрос для ограниченных нормальных операторов в гильбертовом пространстве. Впрочем, основное достоинство этой теории даже не в том, что она придает смысл слову «кратность», а в том, что она позволяет полностью классифицировать нормальные операторы с точностью до унитарной эквивалентности. Это означает, что каждому оператору сопоставляется некая совокупность объектов, которая является *полным набором унитарных инвариантов* в том смысле, что два оператора унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им наборы унитарных инвариантов совпадают. Таким образом, теория кратности позволяет отвечать на вопросы о том, являются ли два данных нормальных оператора унитарно эквивалентными или нет. Кроме того, теория кратности сопоставляет каждому нормальному оператору некую красивую геометрическую модель (по ряду причин более удобную, чем функциональная модель из предыдущей главы), которая представляет и самостоятельный интерес.

Чтобы лучше понимать смысл дальнейших построений, давайте вначале посмотрим на конечномерный случай. Итак, пусть H — конечномерное гильбертово пространство, $T \in \mathscr{B}(H)$ — оператор, который мы для простоты будем предполагать самосопряженным. Тогда, как известно из линейной алгебры, H разлагается в ортогональную прямую сумму собственных подпространств оператора T:

$$H = \dot{\bigoplus_{\lambda\in\sigma(T)}} H(\lambda), \qquad \text{где} \quad H(\lambda) = \operatorname{Ker}(T-\lambda\mathbf{1}_H). \tag{10.1}$$

Следовательно, сам оператор T записывается в виде

$$T = \dot{\bigoplus_{\lambda\in\sigma(T)}} \lambda\mathbf{1}_{H(\lambda)}. \tag{10.2}$$

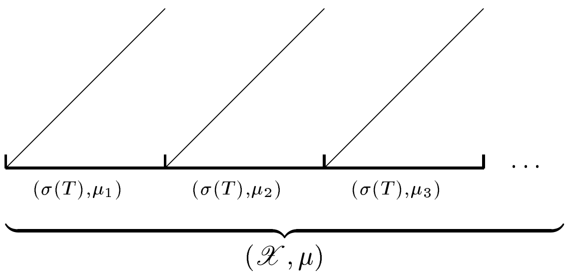
Определим *функцию кратности* m_T на $\sigma(T)$ формулой $m_T(\lambda) = \dim H(\lambda)$. Тогда пара $(\sigma(T), m_T)$ является полным набором унитарных инвариантов оператора T:

$$\boxed{S \text{ и } T \text{ унитарно эквивалентны} \Longleftrightarrow \sigma(S)=\sigma(T) \text{ и } m_S=m_T} \tag{10.3}$$

Упражнение 10.1. Если Вы раньше не встречались с этим утверждением, то докажите его.

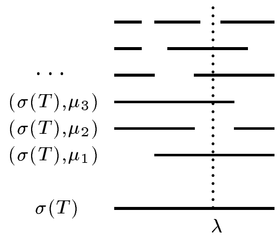
Основные результаты теории кратности, грубо говоря, представляют собой обобщения разложений (10.1) и (10.2) и утверждения (10.3) на бесконечномерный случай. Конечно, $H(\lambda)$ уже не будут собственными подпространствами (как Вы знаете, собственных подпространств у T вообще может не быть); более того, они, вообще говоря, не будут подпространствами в H. А разложения (10.1) и (10.2) будут уже не обычными разложениями в прямую сумму, а разложениями в так называемый «прямой интеграл».

На интуитивном уровне основной геометрический объект, сопоставляемый оператору в теории кратности, выглядит следующим образом. Из предыдущей главы мы помним, что «строительным материалом» для функциональной модели нормального оператора (или гильбертова модуля) служат циклические гильбертовы модули H_i $(i \in I)$, каждый из которых изоморфен модулю вида $L^2(\sigma(T), \mu_i)$ для некоторой меры μ_i на $\sigma(T)$ (см. теоремы 9.3 и 9.4). Для построения функциональной модели (теорема 9.5) мы, говоря неформально, «склеили» друг с другом пространства с мерой $(\sigma(T), \mu_i)$ и на каждом из них рассмотрели функцию $f(t) = t$ (см. рис:)



В результате этой конструкции получаются пространство с мерой $(\mathscr{X}, \mu)$ и ограниченная измеримая функция φ на нем; при этом исходный оператор T оказывается унитарно эквивалентным оператору умножения M_φ в $L^2(\mathscr{X}, \mu)$.

Можно, однако, не «приклеивать» пространства $(\sigma(T), \mu_i)$ друг к другу, а расположить их «друг над другом» так, чтобы они проектировались на $\sigma(T)$:



Геометрический объект, который при этом возникает, называется *измеримым гильбертовым расслоением* или *измеримым полем гильбертовых пространств*. Обратите внимание, что горизонтальные отрезки на этой картинке имеют разрывы; это означает, что «на i-ом этаже» изображена не вся i-ая копия пространства $\sigma(T)$, а только носитель меры μ_i. Число точек на вертикальной прямой, т.е. размерность «слоя» над точкой $\lambda \in \sigma(T)$ — это и есть кратность этой точки. Гильбертово пространство, в котором действует оператор T, следует представлять себе как «непрерывную прямую сумму» слоев над точками $\sigma(T)$; сам же оператор «склеен» из операторов T_λ, каждый из которых действует в слое над $\lambda \in \sigma(T)$ умножением на число λ.

В частности, если H конечномерно, то спектр $\sigma(T)$ конечен, и над каждой его точкой λ «висит» соответствующее собственное подпространство $H(\lambda)$. Типичный бесконечномерный пример — оператор умножения M_t, действующий в $L^2[0,1]$ по правилу $(M_t f)(t) = tf(t)$. Пространство $L^2[0,1]$ при этом оказывается «непрерывной прямой суммой» одномерных пространств $\mathbb{C}_\lambda$ (по всем $\lambda \in [0,1]$), а оператор M_t — «непрерывной прямой суммой» операторов умножения на λ в пространстве $\mathbb{C}_\lambda$.

Перейдем теперь к строгим формулировкам.

10.1. Измеримые гильбертовы расслоения и прямые интегралы

Пусть X — множество, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств, и пусть $\{H(\lambda) : \lambda \in X\}$ — некоторое семейство гильбертовых пространств. Прямое произведение $\prod_{\lambda \in X} H(\lambda)$ назовем *пространством сечений* этого семейства. Напомним в этой связи, что

$$\prod_{\lambda \in X} H(\lambda) = \Big\{ u \colon X \to \bigsqcup_{\lambda \in X} H(\lambda) : u(\lambda) \in H(\lambda) \; \forall \lambda \in X \Big\}.$$

Пространство $H(\lambda)$ будем называть *слоем* над $\lambda \in X$.

Говоря неформально, измеримое гильбертово расслоение – это семейство гильбертовых пространств $\{H(\lambda) : \lambda \in X\}$, в пространстве сечений которого выбрано подпространство, элементы которого мы хотим объявить измеримыми.

Определение 10.1. *Измеримое гильбертово расслоение* (говорят также: *измеримое поле гильбертовых пространств*) над $(X, \mathscr{A})$ — это пара $\mathscr{H} = \big(\{H(\lambda) : \lambda \in X\}, \mathscr{F}\big)$, состоящая из семейства гильбертовых пространств $\{H(\lambda) : \lambda \in X\}$ и векторного подпространства $\mathscr{F} \subset \prod_{\lambda \in X} H(\lambda)$, удовлетворяющего следующим условиям:

(1) для каждых $u, v \in \mathscr{F}$ функция $\lambda \mapsto \langle u(\lambda), v(\lambda)\rangle$ измерима на X;

(2) если сечение $u \in \prod_{\lambda \in X} H(\lambda)$ таково, что функция $\lambda \mapsto \langle u(\lambda), v(\lambda)\rangle$ измерима для любого $v \in \mathscr{F}$, то $u \in \mathscr{F}$;

(3) существует счетное семейство $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ такое, что $\overline{\operatorname{span}}\{u_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty} = H(\lambda)$.

Элементы $\mathscr{F}$ называются *измеримыми сечениями* расслоения $\mathscr{H}$.

Замечание 10.1. Заметим, что из последнего условия следует, что все пространства $H(\lambda)$ сепарабельны. Это ограничение может на первый взгляд показаться довольно искусственным, но в дальнейшем мы увидим, что оно играет весьма существенную роль. Впрочем, в предыдущей главе нам уже пришлось один раз налагать условие сепарабельности — а именно, тогда, когда мы строили скалярную спектральную меру оператора. Теория кратности для операторов в несепарабельных пространствах также существует, но имеет заметно более сложный вид, и мы ею заниматься не будем.

Пример 10.1. Простейший пример измеримого гильбертова расслоения получится, если положить $H(\lambda) = \mathbb{C}$ для всех $\lambda \in X$ и взять в качестве $\mathscr{F}$ множество всех измеримых функций на X.

Пример 10.2 (постоянное расслоение). Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Будем говорить, что функция $u \colon X \to H$ *измерима*, если для любого $x \in H$ измерима функция $\lambda \mapsto \langle u(\lambda), x\rangle$. Положим $H(\lambda) = H$ для всех $\lambda \in X$, и возьмем в качестве $\mathscr{F}$ множество всех измеримых функций на X со значениями в H.

Упражнение 10.2. Проверьте выполнение аксиом (1)–(3).

Пример 10.3 (локально постоянное расслоение). Пусть X представлено в виде $X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, где $X_n \in \mathscr{A}$. Для каждого n зафиксируем сепарабельное гильбертово пространство H_n и положим

$H(\lambda) = H_n$ для каждого $\lambda \in X_n$. Пусть

$$\mathscr{F} = \Big\{ u \in \prod_{\lambda \in X} H(\lambda) : u|_{X_n} : X_n \to H_n \text{ измерима } \forall n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Упражнение 10.3. Проверьте выполнение аксиом (1)–(3).

Оказывается, других измеримых гильбертовых расслоений, кроме описанных в предыдущем примере, не бывает. Чтобы сформулировать это более строго, надо ввести понятие морфизма измеримых гильбертовых расслоений.

Определение 10.2. Пусть $\mathscr{H} = (\{H(\lambda) : \lambda \in X\}, \mathscr{F})$ и $\mathscr{H}' = (\{H'(\lambda) : \lambda \in X\}, \mathscr{F}')$ — измеримые гильбертовы расслоения над $(X, \mathscr{A})$. *Морфизм* (или *измеримое поле операторов*) $T\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ — это семейство операторов $\{T(\lambda) \in \mathscr{B}(H(\lambda), H'(\lambda)) : \lambda \in X\}$ такое, что для любого $u \in \mathscr{F}$ сечение $Tu \in \prod_{\lambda \in X} H'(\lambda)$, определяемое равенством $(Tu)(\lambda) = T(\lambda)u(\lambda)$, принадлежит $\mathscr{F}'$.

Если μ — σ-аддитивная неотрицательная мера на $\mathscr{A}$, то морфизм $T\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ называется *μ-существенно ограниченным*, если функция $\lambda \mapsto \|T(\lambda)\|$ μ-существенно ограничена.

Морфизм $T\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ называется *унитарным изоморфизмом*, если $T(\lambda)$ — унитарный изоморфизм для всех $\lambda \in X$.

Пример 10.4 (диагональный морфизм). Пусть $f\colon X \to \mathbb{C}$ — измеримая функция. *Диагональный морфизм* $D_f\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ определяется формулой $D_f(\lambda) = f(\lambda)\mathbf{1}_{H(\lambda)}$ (убедитесь, что это на самом деле морфизм гильбертовых расслоений). Ясно, что D_f существенно ограничен тогда и только тогда, когда f существенно ограничена, и является унитарным изоморфизмом тогда и только тогда, когда $|f(\lambda)| = 1$ для всех $\lambda \in X$.

Определение 10.3. Измеримое гильбертово расслоение называется *тривиальным*, если оно унитарно изоморфно постоянному расслоению (см. пример 10.2).

В дальнейшем через $\overline{\mathbb{N}}$ мы будем обозначать «расширенное множество натуральных чисел» $\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$.

Теорема 10.1. *Пусть $\mathscr{H}$ — измеримое гильбертово расслоение над $(X, \mathscr{A})$. Для каждого $n \in \overline{\mathbb{N}}$ положим $X_n = \{\lambda \in X : \dim H(\lambda) = n\}$. Тогда $X_n \in \mathscr{A}$, и ограничение $\mathscr{H}|_{X_n}$ тривиально. Как следствие, $\mathscr{H}$ изоморфно локально постоянному расслоению (см. пример 10.3). В частности, измеримое гильбертово расслоение постоянной размерности тривиально.*

Замечание 10.2 (для любителей топологии). С точки зрения топологии, формулировка теоремы выглядит несколько неожиданной: ведь не все же локально тривиальные векторные расслоения тривиальны! Но теория меры — наука гораздо более «мягкая», чем топология; например, отрезок и окружность, конечно, не гомеоморфны друг другу как топологические пространства, но как измеримые пространства они ничем друг от друга не отличаются. Примерно то же самое происходит и с расслоениями...

Доказательство. (Набросок). Выберем счетное семейство измеримых сечений $\{u_n\}$, удовлетворяющее условию (3) определения 10.1. Для каждого конечного подмножества $I \subset \mathbb{N}$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ определим функции δ_I и Δ_n на X формулами

$$\delta_I(\lambda) = \left|\det\left(\langle u_i(\lambda), u_j(\lambda)\rangle\right)_{i,j\in I}\right|,$$
$$\Delta_n(\lambda) = \sup\{\delta_I(\lambda) : I \subset \mathbb{N},\ \mathrm{Card} I = n\}.$$

Ясно, что δ_I, а, следовательно, и Δ_n $\mathscr{A}$-измеримы. При этом из условия (3) определения 10.1 следует, что $\dim H(\lambda) < n$ в точности тогда, когда $\Delta_n(\lambda) = 0$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $Y_n = \{\lambda \in X : \Delta_n(\lambda) = 0\}$ принадлежит $\mathscr{A}$. Следовательно, множества $X_n = Y_{n+1} \setminus Y_n$, $X_0 = Y_1$ и $X_\infty = X \setminus \bigcup_{n=0}^\infty X_n$ также лежат в $\mathscr{A}$.

При доказательстве того, что $\mathscr{H}$ тривиально на каждом X_n, мы можем считать, что $X = X_n$.

Лемма 10.1. *Пусть $\mathscr{H}$ — измеримое гильбертово расслоение, причем $\dim H(\lambda) = n$ для всех $\lambda \in X$ (здесь $n \in \overline{\mathbb{N}}$). Тогда существует семейство измеримых сечений $\{e_i\}_{i=1}^n$ такое, что $\{e_i(\lambda)\}_{i=1}^n$ — ортонормированный базис в $H(\lambda)$ для всех $\lambda \in X$.*

Упражнение 10.4. Докажите эту лемму.

Указание. Доказательство напоминает процесс ортогонализации Грама–Шмидта. А именно, возьмите семейство $\{u_i\}$ такое, как выше, и подправьте u_1: вначале добавьте к нему сумму вида $\sum_{i\geqslant 2} f_i u_i$ (где f_i — подходящие измеримые функции) так, чтобы полученное сечение u_1' нигде не обращалось в нуль, а затем положите $e_1 = u_1'/\|u_1'\|$. Далее замените каждое u_i (при $i \geqslant 2$) на $u_i' = u_i - \langle u_i, e_1\rangle e_1$; полученные сечения будут в каждой точке ортогональны e_1. Отбросьте тождественно нулевые сечения и проделайте с оставшимися ту же процедуру, что и с u_i-ыми; это даст e_2, и т.д. На выходе получится нужное семейство $\{e_i\}$.

Для завершения доказательства теоремы остается взять гильбертово пространство H_n' с ортонормированным базисом $\{e_i'\}_{i=1}^n$ и определить унитарный изоморфизм T_n из постоянного расслоения над X_n

со слоем H'_n в $\mathscr{H}|_{X_n}$ формулой $T(\lambda)e'_i = e_i(\lambda)$. Наконец, пусть $\mathscr{H}'$ — локально постоянное расслоение, построенное по разбиению $\{X_n\}$ со слоем H'_n на каждом X_n. Тогда морфизм $T\colon \mathscr{H}' \to \mathscr{H}$, совпадающий с T_n на каждом X_n, является, как легко убедиться (убедитесь!), унитарным изоморфизмом. $\square$

В качестве следствия мы получаем следующий результат о единственности семейства измеримых сечений:

Упражнение 10.5. Пусть $\{H(\lambda) : \lambda \in X\}$ — семейство гильбертовых пространств, $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}'$ — семейства его сечений, удовлетворяющие условиям (1)–(3) определения 10.1. Тогда $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$.

Теперь мы готовы определить, что такое прямой интеграл. Пусть $(X, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $\mathscr{H}$ — измеримое гильбертово расслоение над $(X, \mathscr{A})$, $\mathscr{F}$ — пространство его измеримых сечений.

Определение 10.4. Положим по определению

$$\mathscr{L}^2(X, \mathscr{H}) = \{u \in \mathscr{F} : \text{функция } \lambda \mapsto \|u(\lambda)\|^2 \ \mu\text{-интегрируема}\ \}.$$

Элементы $\mathscr{L}^2(X, \mathscr{H})$ будем называть *квадратично интегрируемыми сечениями* расслоения $\mathscr{H}$.

Легко видеть, что $\mathscr{L}^2(X, \mathscr{H})$ — векторное подпространство в $\mathscr{F}$. Определим на нем полуторалинейную форму

$$\langle u, v\rangle = \int_X \langle u(\lambda), v(\lambda)\rangle \, d\mu(\lambda). \tag{10.4}$$

Определение 10.5. Факторпространство

$$\mathscr{L}^2(X, \mathscr{H}) / \{u : u = 0 \ \mu\text{-п.в.}\}$$

обозначается символом $\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda)$ или $\Gamma^2(X, \mathscr{H})$ и называется *прямым интегралом* семейства $\{H(\lambda) : \lambda \in X\}$ по мере μ.

Замечание 10.3. Как и в случае обычных L^2-пространств, мы часто будем допускать определенную вольность в речи и обозначениях и называть элементы из $\Gamma^2(X, \mathscr{H})$ «сечениями» (хотя, строго говоря, речь при этом всегда будет идти о классах эквивалентности).

Формула (10.4), как нетрудно видеть, задает скалярное произведение на $\Gamma^2(X, \mathscr{H})$ и превращает его в предгильбертово пространство.

Упражнение 10.6. $\Gamma^2(X, \mathscr{H})$ — гильбертово пространство.

Пример 10.5. Пусть $X = \{1, \ldots, n\}$, где $n \in \overline{\mathbb{N}}$, и пусть $\mu(\{k\}) = 1$ для всех k («считающая» мера). Тогда

$$\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda) \cong \dot{\bigoplus_{1 \leqslant k \leqslant n}} H(k).$$

Пример 10.6. Пусть $\mathscr{H}$ — постоянное расслоение со слоем $\mathbb{C}$. Тогда

$$\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda) \cong L^2(X, \mu).$$

Пример 10.7. Пусть $\mathscr{H}$ — постоянное расслоение со слоем H. Обозначим через $L^2_H(X, \mu)$ множество классов эквивалентности μ-измеримых функций $u\colon X \to H$, для которых функция $\lambda \mapsto \|u(\lambda)\|^2$ интегрируема, и введем там скалярное произведение формулой (10.4). Тогда, как нетрудно видеть,

$$\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda) \cong L^2_H(X, \mu).$$

Пример 10.8. Пусть X представлено в виде $X = \bigsqcup_n X_n$, где $X_n \in \mathscr{A}$ для всех n, и пусть $H(\lambda) = H_n$ для всех $\lambda \in X_n$ и всех $n \in \mathbb{N}$ (см. пример 10.3). Тогда

$$\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda) \cong \dot{\bigoplus_{n \in \mathbb{N}}} L^2_{H_n}(X_n, \mu).$$

Следующее предложение часто принимают в качестве *определения* прямого интеграла.

Теорема 10.2 (координатное описание прямого интеграла). *Пусть $\mathscr{H}$ — измеримое гильбертово расслоение над $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Для каждого $n \in \overline{\mathbb{N}}$ положим $X_n = \{\lambda \in X : \dim H(\lambda) = n\}$. Пусть H_∞ — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $H_n = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $H_0 = \{0\}$. Тогда*

$$\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda) \cong \big\{u \in L^2_{H_\infty}(X, \mu) : u(\lambda) \in H_n \text{ для п.в. } \lambda \in X_n,\ \forall n \in \overline{\mathbb{N}}\big\}.$$

Доказательство. Достаточно объединить теорему 10.1 и пример 10.8. ☐

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное понятие.

Определение 10.6. Мы будем называть измеримое гильбертово расслоение $\mathscr{H}$ над $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *приведенным*, если $\mu(\{\lambda \in X : H(\lambda) = 0\}) = 0$.

Каждое гильбертово расслоение можно сделать приведенным, не изменив его прямой интеграл. Для этого положим $X_+ = \{\lambda \in X : H(\lambda) \neq 0\}$, и введем новую меру μ' на X по формуле $\mu'(Y) = \mu(Y \cap X_+)$ для всех $Y \in \mathscr{A}$.

Упражнение 10.7. Расслоение $\mathscr{H}$ является приведенным над $(X, \mathscr{A}, \mu')$, и

$$\int_X^\oplus H(\lambda)\, d\mu(\lambda) \cong \int_X^\oplus H(\lambda)\, d\mu'(\lambda).$$

Итак, каждому измеримому гильбертову расслоению поставлено в соответствие гильбертово пространство — его прямой интеграл. Как и следовало ожидать, эта конструкция естественна:

Предложение 10.1. *Пусть $T\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ — существенно ограниченный морфизм измеримых гильбертовых расслоений над (X, μ). Тогда для любого $u \in \mathscr{L}^2(X, \mathscr{H})$ сечение Tu лежит в $\mathscr{L}^2(X, \mathscr{H}')$. Как следствие, определен оператор $\bar{T}\colon \Gamma^2(X, \mathscr{H}) \to \Gamma^2(X, \mathscr{H}')$, переводящий класс эквивалентности сечения u в класс эквивалентности Tu. Оператор $\bar{T}$ ограничен, и $\|\bar{T}\| \leqslant \operatorname{ess\,sup}_{\lambda \in X} \|T(\lambda)\|$.*

Доказательство. Положим $C = \operatorname{ess\,sup}_{\lambda \in X} \|T(\lambda)\|$. Тогда для любого $u \in \mathscr{L}^2(X, \mathscr{H})$ мы имеем $\|T(\lambda)u(\lambda)\|^2 \leqslant C^2 \|u(\lambda)\|^2$ для почти всех $\lambda \in X$, так что $Tu \in \mathscr{L}^2(X, \mathscr{H}')$. Интегрируя последнее неравенство, получаем $\|Tu\|^2 \leqslant C^2 \|u\|^2$, как и требовалось. $\square$

Упражнение 10.8. Покажите, что на самом деле $\|\bar{T}\| = \operatorname{ess\,sup}_{\lambda \in X} \|T(\lambda)\|$.

Таким образом, мы получаем функтор из категории измеримых гильбертовых расслоений и существенно ограниченных морфизмов в категорию гильбертовых пространств и ограниченных операторов.

Определение 10.7. Оператор $\bar{T}$, построенный в предложении 10.1, называется *прямым интегралом* семейства операторов $T = \{T(\lambda) : \lambda \in X\}$ и обозначается $\int_X^\oplus T(\lambda)\, d\mu(\lambda)$. Операторы из $\Gamma(X, \mathscr{H})$ в $\Gamma(X, \mathscr{H}')$, имеющие указанный вид, называются *разложимыми* (по фон Нойманну).

Пример 10.9. В ситуации, описанной в примере 10.5, мы имеем $\bar{T} = \bigoplus_{1 \leqslant k \leqslant n} T(k)$. Таким образом, в «дискретном» случае, когда (X, μ) — это счетное или конечное множество со »считающей» мерой, прямой интеграл — это то же самое, что гильбертова прямая сумма (см. предыдущую главу).

Следующий пример, как мы вскоре увидим, является в определенном смысле «модельным».

Пример 10.10. Пусть $\mathscr{H}$ — измеримое гильбертово расслоение над (X, μ). Каждая существенно ограниченная измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ задает оператор

$$\bar{D}_f = \int_X^{\oplus} f(\lambda)\mathbf{1}_{H(\lambda)}\, d\mu(\lambda),$$

действующий в пространстве $H = \int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda)$. Этот оператор ассоциирован с диагональным морфизмом D_f (см. пример 10.4). Операторы в H, представимые в указанном виде, называются *диагонализируемыми*.

Пример 10.11. Если в предыдущем примере взять в качестве (X, μ) множество $\mathbb{N}$ со считающей мерой, и положить $H(n) = \mathbb{C}$ для всех n, то получится наш старый знакомый — диагональный оператор в ℓ^2 (см. пример 3.1). Если же (X, μ) произвольно, а расслоение $\mathscr{H}$ — постоянное со слоем $\mathbb{C}$, то $\bar{D}_f$ — это оператор умножения $M_f\colon L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$ (см. пример 3.2).

Легко видеть, что оператор $\bar{D}_f$ зависит только от класса μ-эквивалентности функции f, т.е. от соответствующего элемента $L^\infty(X, \mu)$. Кроме того, диагонализируемые операторы обладают следующими очевидными свойствами:

1) $\bar{D}_1 = \mathbf{1}$;
2) $\bar{D}_{\alpha f + \beta g} = \alpha \bar{D}_f + \beta \bar{D}_g \quad (f, g \in L^\infty(X, \mu),\ \alpha, \beta \in \mathbb{C})$;
3) $\bar{D}_{fg} = \bar{D}_f \bar{D}_g \quad (f, g \in L^\infty(X, \mu))$;
4) $\bar{D}_{\bar{f}} = \bar{D}_f^* \quad (f \in L^\infty(X, \mu))$.

Иными словами,

Предложение 10.2. *Отображение*

$$L^\infty(X, \mu) \to \mathscr{B}\Big(\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda)\Big), \quad f \mapsto \bar{D}_f, \tag{10.5}$$

является унитальным $*$-гомоморфизмом. Таким образом, гильбертово пространство $\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda)$ становится левым унитальным гильбертовым $L^\infty(X, \mu)$-модулем.

Гильбертов модуль, описанный в предыдущем предложении, является в определенном смысле «модельным примером» гильбертова модуля над алгеброй $L^\infty(X, \mu)$. Мы не будем строго формулировать и доказывать соответствующее утверждение, поскольку алгебра $L^\infty(X, \mu)$

играет для нас скорее вспомогательную роль. Напомним, что основной алгеброй, представления которой (=гильбертовы модули над которой) нас интересуют, является алгебра $C(X)$ непрерывных функций на компакте X (см. теорему 8.4).

Если X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, а μ — регулярная положительная борелевская мера на X, то алгебра $C(X)$ канонически отображается в $L^\infty(X,\mu)$, так что каждый гильбертов $L^\infty(X,\mu)$-модуль может рассматриваться и как гильбертов $C(X)$-модуль (см. предыдущую главу). Поэтому из предложения 10.2 вытекает

Следствие 10.1. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, μ — регулярная положительная борелевская мера на X, $\mathscr{H} = (\{H(\lambda) : \lambda \in X\}, \mathscr{F})$ — измеримое гильбертово расслоение над $(X, \mathscr{B}or(X), \mu)$. Тогда отображение* (10.5) *превращает гильбертово пространство $\int_X^\oplus H(\lambda)\,d\mu(\lambda)$ в левый унитальный гильбертов $C(X)$-модуль.*

Упражнение 10.9. Если расслоение $\mathscr{H}$ — приведенное, то μ является скалярной спектральной мерой для $\int_X^\oplus H(\lambda)\,d\mu(\lambda)$.

10.2. Разложение гильбертова $C(X)$-модуля в прямой интеграл

Наша следующая цель — показать, что любой унитальный сепарабельный гильбертов $C(X)$-модуль имеет вид $\Gamma^2(X,\mathscr{H})$ для некоторого измеримого гильбертова расслоения $\mathscr{H}$ над X (см. следствие 10.1). Это и есть та самая «геометрическая модель» гильбертова $C(X)$-модуля, о которой упоминалось в начале главы.

Теорема 10.3. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, H — унитальный сепарабельный гильбертов $C(X)$-модуль, $\mu \in M(X)$ — его скалярная спектральная мера. Тогда существует приведенное измеримое гильбертово расслоение $\mathscr{H} = (\{H(\lambda) : \lambda \in X\}, \mathscr{F})$ над $(X, \mathscr{B}or(X), \mu)$ такое, что*

$$H \cong \int_X^\oplus H(\lambda)\,d\mu(\lambda) \qquad \text{в} \quad C(X)\text{-}\mathsf{Hmod}_1\,.$$

Прежде чем доказывать теорему, договоримся о терминологии. Пусть $\mathscr{H}$ — измеримое гильбертово расслоение над произвольным пространством с мерой $(X, \mathscr{A}, \mu)$, $H = \Gamma^2(X,\mathscr{H})$ — его прямой интеграл,

$M \subset \mathscr{L}^2(X, \mathscr{H})$ — некоторое множество квадратично интегрируемых сечений. Рассмотрим подмодуль

$$H_M = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i \ : \ a_i \in C(X),\ u_i \in M,\ n \in \mathbb{N} \Big\} \subset H;$$

ясно, что это наименьший подмодуль в H, содержащий классы эквивалентности всех сечений из M. Мы будем говорить, что H_M *порожден* семейством сечений M.

Лемма 10.2. *Пусть* $M = \{u_i : i \in I\} \subset \mathscr{L}^2(X, \mathscr{H})$ *— конечное или счетное семейство сечений,* $H_M \subset \Gamma^2(X, \mathscr{H})$ *— порожденный этим семейством подмодуль. Предположим, что для п.в.* $\lambda \in X$ *подпространство* $\operatorname{span}\{u_i(\lambda) : i \in I\}$ *плотно в* $H(\lambda)$. *Тогда* H_M *плотен в* $\Gamma^2(X, \mathscr{H})$.

Доказательство. Пусть $v \in H_M^{\perp}$. Тогда для любых $i \in I$ и $f \in C(X)$ мы имеем

$$0 = \langle f u_i, v \rangle = \int_X f(\lambda) \langle u_i(\lambda), v(\lambda) \rangle \, d\mu(\lambda). \tag{10.6}$$

Определим функцию $\rho_i \colon X \to \mathbb{C}$ и комплексную борелевскую меру ν_i на X формулами $\rho_i(\lambda) = \langle u_i(\lambda), v(\lambda) \rangle$ и $\nu_i = \rho_i \cdot \mu$. Поскольку μ регулярна, а ν_i абсолютно непрерывна относительно нее, то и ν_i регулярна (см. теорему 9.7 (iii)). Продолжая цепочку равенств (10.6), мы видим, что $\int_X f(\lambda)\, d\nu_i(\lambda) = 0$ для любой $f \in C(X)$. Следовательно, $\nu_i = 0$, т.е. $\rho_i = 0$ μ-п.в. Это, в свою очередь, означает, что $u_i(\lambda) \perp v(\lambda)$ μ-п.в. Поскольку это так для любого $i \in I$, а множество I не более чем счетно, мы заключаем, что $v = 0$ μ-п.в., т.е. что $H_M^{\perp} = 0$, как и требовалось. □

Доказательство теоремы. Представим H в виде гильбертовой суммы циклических модулей: $H = \dot{\bigoplus}_n H_n$. Пусть $x_n \in H_n$ — циклический вектор, $\mu_n = \mu_{x_n}$ — соответствующая мера. Поскольку $\mu_n \ll \mu$, существует борелевская μ-интегрируемая функция $\rho_n \geqslant 0$ такая, что $\mu_n = \rho_n \cdot \mu$. Положим $X_n' = \{\lambda \in X : \rho_n(\lambda) \neq 0\}$, и введем *функцию кратности* $m \colon X \to \overline{\mathbb{N}}$, полагая $m(\lambda) = \operatorname{Card}\{n \in \mathbb{N} : \lambda \in X_n'\}$. Наконец, для каждого $p \in \overline{\mathbb{N}}$ положим $X_p = \{\lambda \in X : m(\lambda) = p\}$. Тогда, очевидно, $X = \bigsqcup_{p \in \overline{\mathbb{N}}} X_p$.

Упражнение 10.10. Докажите, что множества X_p — борелевские.

Теперь построим искомое гильбертово расслоение. Зафиксируем бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство K_∞ с ортонормированным базисом $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $K_n = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$; пусть также $K_0 = 0$. Для каждого $\lambda \in X$ положим

$H(\lambda) = K_{m(\lambda)}$, и обозначим через $\mathscr{H}$ соответствующее локально постоянное гильбертово расслоение на X (см. пример 10.3); таким образом, на каждом X_p ($p \in \overline{\mathbb{N}}$) расслоение $\mathscr{H}$ постоянно и имеет слой K_p. Отметим, что $\mathscr{H}$ — приведенное расслоение; в самом деле, из равенства $\mu_n(X_0) = 0$, справедливого для всех $n \in \mathbb{N}$, легко следует (объясните, как), что $\mu(X_0) = 0$. Рассмотрим прямой интеграл

$$K = \int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda) = \bigl\{u \in L^2_{K_\infty}(X,\mu) : u(\lambda) \in K_p \text{ для п.в. } \lambda \in X_p,\ \forall p \in \overline{\mathbb{N}}\bigr\}.$$

(см. теорему 10.2). Наша задача — построить изометрический изоморфизм H и K как $C(X)$-модулей.

Для того чтобы определить морфизм из H в K, достаточно задать его на каждом прямом слагаемом H_n; далее, из цикличности H_n следует, что любой морфизм из H_n однозначно определен своим значением на циклическом векторе x_n. Таким образом, для каждого n мы должны указать некий вектор $u_n \in K$, а потом отправить в него x_n. При этом мы должны обеспечить попарную ортогональность u_n-ых. Сделать это можно следующим образом.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$, и для каждого $\lambda \in X'_n$ положим

$$q(n,\lambda) = \mathrm{Card}\{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n,\ \lambda \in X'_k\}.$$

Очевидно, $q(n,\lambda) \leqslant m(\lambda)$. Определим функцию $u_n \in L^2_{K_\infty}(X,\mu)$ формулой

$$u_n(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{\rho_n(\lambda)}\, e_{q(n,\lambda)}, & \lambda \in X'_n \\ 0, & \lambda \notin X'_n \end{cases}$$

Из неравенства $q(n,\lambda) \leqslant m(\lambda) = \dim H(\lambda)$ следует, что $u_n(\lambda) \in H(\lambda)$ для всех $\lambda \in X$, т.е. u_n (точнее, ее класс эквивалентности) принадлежит K.

Лемма 10.3. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует единственный морфизм гильбертовых $C(X)$-модулей $\varphi_n \colon H_n \to K$ такой, что $\varphi(x_n) = u_n$. Этот морфизм изометричен.*

Доказательство. Единственность φ_n следует из того, что x_n — циклический вектор. Для доказательства существования заметим, что для любой $f \in C(X)$ справедливы равенства

$$\|f \cdot x_n\|^2_{H_n} = \int_X |f(\lambda)|^2\, d\mu_n(\lambda) = \int_X |f(\lambda)|^2 \rho_n(\lambda)\, d\mu(\lambda) =$$
$$= \int_X |f(\lambda)|^2 \|u_n(\lambda)\|^2\, d\mu(\lambda) = \int_X \bigl\|(f \cdot u_n)(\lambda)\bigr\|^2_{K(\lambda)} d\mu(\lambda) = \|f \cdot u_n\|^2_K.$$

Отсюда следует, что отображение $C(X)x_n \to K$, $f \cdot x_n \mapsto f \cdot u_n$ корректно определено и изометрично. Очевидно, оно также является морфизмом $C(X)$-модулей. Поскольку $C(X)x_n$ плотно в H_n, построенный морфизм однозначно продолжается на весь H_n. Дальше ясно. $\square$

Лемма 10.4. $\operatorname{Im}\varphi_i \perp \operatorname{Im}\varphi_j$ *при* $i \neq j$.

Доказательство. Пусть для определенности $i < j$. Нам достаточно доказать (объясните, почему), что $u_i(\lambda) \perp u_j(\lambda)$ для п.в. $\lambda \in X$. Если $\lambda \in X'_i \cap X'_j$, то из $i < j$ следует, что $q(i,\lambda) < q(j,\lambda)$, и, значит, $u_i(\lambda) \perp u_j(\lambda)$. А для всех остальных λ мы имеем либо $u_i(\lambda) = 0$, либо $u_j(\lambda) = 0$. Тем самым лемма доказана. $\square$

Лемма 10.5. *Подмодуль* $\sum_j \operatorname{Im}\varphi_j$ *плотен в* K.

Доказательство. Указанный подмодуль порожден семейством сечений $\{u_i\}$. Поэтому, с учетом леммы 10.2, нам достаточно проверить, что для любого $\lambda \in X$ подпространство $K_\lambda = \operatorname{span}\{u_i(\lambda) : i \in \mathbb{N}\}$ плотно в $H(\lambda)$. Возьмем то единственное $p \in \overline{\mathbb{N}}$, для которого $\lambda \in X_p$; пусть для определенности $p < \infty$. Тогда существует единственный набор натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_p$ такой, что $\lambda \in X'_{n_1} \cap \ldots \cap X'_{n_p}$, но $\lambda \notin X'_k$ при $k \notin \{n_1, \ldots, n_p\}$. Из определения u_i-ых следует, что

$$u_{n_1}(\lambda) = \rho_{n_1}(\lambda)e_1,\ u_{n_2}(\lambda) = \rho_{n_2}(\lambda)e_2, \ldots, u_{n_p}(\lambda) = \rho_{n_p}(\lambda)e_p,$$

и, кроме того, $\rho_{n_j}(\lambda) \neq 0$ для всех $j = 1, \ldots, p$. Отсюда следует, что $e_1, \ldots, e_p \in K_\lambda$, т.е. $K_\lambda = H(\lambda)$. Если же $p = \infty$, то, применяя аналогичные рассуждения (с той лишь разницей, что набор $n_1 < n_2 < \ldots$ будет бесконечным), мы видим, что $e_n \in K_\lambda$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. K_λ плотно в $H(\lambda)$. Тем самым лемма доказана. $\square$

Для завершения доказательства теоремы остается рассмотреть тот единственный морфизм $\varphi\colon \bigoplus_n H_n \to K$, у которого $\varphi|_{H_n} = \varphi_n$ для всех n. Из трех предыдущих лемм следует, что φ изометричен и имеет плотный образ. Следовательно, он единственным образом продолжается до изометрического изоморфизма $\bar{\varphi}\colon \dot{\bigoplus}_n H_n = H \to K$. Теорема доказана. $\square$

В терминах операторов доказанная теорема приобретает такой вид:

Теорема 10.4. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор, μ — его скалярная спек-*

тральная мера. Тогда существует измеримое приведенное гильбертово расслоение $\mathscr{H} = (\{H(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}, \mathscr{F})$ *над* $(\sigma(T), \mathscr{B}or(\sigma(T)), \mu)$ *такое, что* T *унитарно эквивалентен оператору* $\int_X^{\oplus} \lambda \mathbf{1}_{H(\lambda)}\, d\mu(\lambda)$, *действующему в* $\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda)$.

10.3. Теорема о классификации

Как уже упоминалось в начале главы, теория кратности позволяет дать полную классификацию нормальных операторов в сепарабельных гильбертовых пространствах с точностью до унитарной эквивалентности. Для этого нам понадобится утверждение, обратное к лемме 10.2.

Лемма 10.6. *Пусть* $\mathscr{H}$ *— измеримое гильбертово расслоение над пространством с мерой* $(X, \mathscr{A}, \mu)$, $H = \Gamma^2(X, \mathscr{H})$ *— его прямой интеграл,* $M \subset \mathscr{L}^2(X, \mathscr{H})$ *— некоторое множество квадратично интегрируемых сечений,* $H_M \subset H$ *— подмодуль, порожденный* M. *Предположим, что* H_M *плотен в* H. *Тогда подпространство* $\operatorname{span}\{u(\lambda) : u \in M\}$ *плотно в* $H(\lambda)$ *для п.в.* $\lambda \in X$.

Доказательство. Пусть $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ — счетное семейство измеримых сечений, удовлетворяющее условию (3) определения 10.1. Заменяя при необходимости каждое u_n на $u_n'(\lambda) = u_n(\lambda)/\|u_n(\lambda)\|$ (для тех λ, где $u_n(\lambda) \neq 0$), мы можем считать, что u_n квадратично интегрируемы. Для каждого $\lambda \in X$ положим $H_M^\lambda = \overline{\operatorname{span}}\{u(\lambda) : u \in M\}$, и предположим, что заключение леммы неверно, т.е. что $H_M^\lambda \neq H(\lambda)$ на множестве положительной меры. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $X_n = \{\lambda \in X : u_n(\lambda) \notin H_M^\lambda\}$. Из сделанного предположения следует, что $\mu(X_n) > 0$ для некоторого n. Зафиксируем такое n и рассмотрим функцию $d_n \colon X \to [0, \infty)$, $d_n(\lambda) = \rho\big(u_n(\lambda), H_M^\lambda\big)$. Мы имеем $d_n(\lambda) > 0$ для любого $\lambda \in X_n$; следовательно, существуют $\varepsilon > 0$ и множество $Y \subset X_n$ такие, что $\mu(Y) > 0$ и $d_n(\lambda) > \varepsilon$ для любого $\lambda \in Y$. Тогда для любого $v \in H_M$ справедлива оценка

$$\|v - u_n\|^2 = \int_X \|v(\lambda) - u_n(\lambda)\|^2\, d\mu(\lambda) \geqslant \int_Y d_n^2(\lambda)\, d\mu(\lambda) \geqslant \varepsilon^2 \mu(Y).$$

Следовательно, $u_n \notin \overline{H_M}$, а это противоречит условию. Тем самым лемма доказана. □

Теорема 10.5. *Пусть* X *— компактное хаусдорфово топологическое пространство,* $\mu, \mu' \in M(X)$ *— неотрицательные меры,* $\mathscr{H}$ *и* $\mathscr{H}'$ *— приведенные измеримые гильбертовы расслоения над* $(X, \mathscr{B}or(X), \mu)$ *и*

$(X, \mathscr{B}or(X), \mu')$ соответственно, $H = \Gamma(X, \mathscr{H})$ и $H' = \Gamma(X, \mathscr{H}')$ — их прямые интегралы. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) $H \cong H'$ *в* $C(X)$-Hmod_1*;*
(ii) $\mu \sim \mu'$*, и* $\dim H(\lambda) = \dim H'(\lambda)$ *μ-п.в.*

Доказательство. (ii)$\Longrightarrow$(i). Представим H и H' так, как это указано в теореме 10.2, и положим $\rho = \dfrac{d\mu}{d\mu'}$ и $\rho' = \dfrac{d\mu'}{d\mu}$. Легко убедиться (убедитесь), что $\rho\rho' = 1$ п.в. Далее, как и в доказательстве леммы 10.3, проверяется, что оператор $T\colon H \to H'$, действующий по формуле $(Tu)(\lambda) = \sqrt{\rho(\lambda)}u(\lambda)$, корректно определен, изометричен и является морфизмом гильбертовых $C(X)$-модулей. С другой стороны, оператор $S\colon H' \to H$, действующий по формуле $(Su)(\lambda) = \sqrt{\rho'(\lambda)}u(\lambda)$, является, очевидно, обратным к T. Следовательно, T — изоморфизм в $C(X)$-Hmod_1.

(i)$\Longrightarrow$(ii). Эквивалентность мер μ и μ' следует из упражнения 10.9.

Положим $m(\lambda) = \dim H(\lambda)$, $m'(\lambda) = \dim H'(\lambda)$ и $Z = \{\lambda \in X : m(\lambda) \neq \neq m'(\lambda)\}$. Допустим, что $\mu(Z) > 0$. Тогда существует борелевское подмножество $Y \subset Z$ с $\mu(Y) > 0$, на котором функции m и m' постоянны. Из того, что H и H' изоморфны в $C(X)$-Hmod_1, очевидным образом следует, что их замкнутые подмодули $\chi_Y H$ и $\chi_Y H'$ изоморфны в $C(X)$-Hmod_1 или, что эквивалентно, в $C(Y)$-Hmod_1. Поэтому в дальнейшем мы, не ограничивая общности, можем считать, что $Y = X$.

Пусть для определенности $m(\lambda) = p < q = m'(\lambda)$ для любого $\lambda \in X$, и пусть $\varphi\colon H \to H'$ — изоморфизм в $C(X)$-Hmod_1. С учетом теоремы 10.2, мы можем считать, что $H = L^2_{H_p}(X, \mu)$ и $H' = L^2_{H_q}(X, \mu')$, где H_p и H_q — гильбертовы пространства размерностей p и q соответственно. Возьмем ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_p$ в H_p, и для каждого $k = 1, \ldots, p$ рассмотрим постоянную функцию $\bar{e}_k\colon X \to H_p$, $\bar{e}_k(\lambda) = e_k$. Из леммы 10.2 следует, что подмодуль в H, порожденный $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_p$, плотен в H. Для каждого $k = 1, \ldots, p$ выберем функцию $v_k\colon X \to H_q$, класс эквивалентности которой есть $\varphi(\bar{e}_k)$. Из того, что φ — изоморфизм, легко следует, что $v_1, \ldots, v_p$ порождают плотный подмодуль в H'. Но тогда из леммы 10.6 следует, что $\operatorname{span}\{v_1(\lambda), \ldots, v_p(\lambda)\} = H_q$ для п.в. $\lambda \in X$, а это невозможно ввиду условия $p < q$. Тем самым теорема доказана. $\square$

Объединяя теоремы 10.3 и 10.5, мы получаем следующий результат, который, по-видимому, представляет собой наиболее полную (по сравнению с ранее обсуждавшимися) формулировку спектральной теоремы.

Теорема 10.6 (спектральная теорема). *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство. Тогда:*

I. *Для любого унитального сепарабельного гильбертова $C(X)$-модуля H существуют неотрицательная мера $\mu \in M(X)$ и приведенное измеримое гильбертово расслоение $\mathscr{H}$ над $(X, \mathscr{B}or(X), \mu)$ такие, что $H \cong \Gamma^2(X, \mathscr{H})$ в $C(X)$-Hmod_1. При этом μ является скалярной спектральной мерой для H.*

II. *Пусть H и H' — унитальные сепарабельные гильбертовы $C(X)$-модули, μ и μ' — соответствующие меры, $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$ — соответствующие приведенные измеримые гильбертовы расслоения. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $H \cong H'$ *в* $C(X)$-Hmod_1*;*
(ii) $\mu \sim \mu'$, *и* $\dim H(\lambda) = \dim H'(\lambda)$ μ*-п.в.*

Теорема 10.6 позволяет дать следующее определение.

Определение 10.8. Пусть H — сепарабельный унитальный гильбертов $C(X)$-модуль, μ — его скалярная спектральная мера, $\mathscr{H} = (\{H(\lambda) : \lambda \in X\}, \mathscr{F})$ — приведенное измеримое гильбертово расслоение, такое, что $H \cong \Gamma^2(X, \mathscr{H})$ (см. п. 1 теоремы 10.6). Борелевская функция $m_H \colon X \to \overline{\mathbb{N}}$ называется *функцией кратности* модуля H, если $m_H(\lambda) = \dim H(\lambda)$ μ-п.в. Функцией кратности m_T нормального оператора $T \in \mathscr{B}(H)$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H назовем функцию кратности H как гильбертова $C(\sigma(T))$-модуля.

Из теоремы 10.6 следует, что функция кратности корректно определена, и ее класс μ-эквивалентности однозначно определен классом изоморфизма модуля H.

Таким образом, теорема 10.6 дает полную классификацию сепарабельных унитальных гильбертовых $C(X)$-модулей с точностью до изометрического изоморфизма. При этом фактически можно обойтись без использования измеримых расслоений. Чтобы увидеть это более отчетливо, введем некоторые обозначения. Если H — гильбертово пространство, $T \in \mathscr{B}(H)$ — ограниченный оператор, то для каждого $p \in \overline{\mathbb{N}}$ через pH (соответственно, pT) будет обозначаться гильбертова прямая сумма p экземпляров пространства H (соответственно, оператора T).

Упражнение 10.11. Пусть $p \in \overline{\mathbb{N}}$, H_p — сепарабельное гильбертово пространство размерности p, $\mu \in M(X)$ — неотрицательная мера. Покажите, что гильбертовы $C(X)$-модули $L^2_{H_p}(X, \mu)$ и $pL^2(X, \mu)$ изометрически изоморфны.

Теперь рассмотрим множество всех пар (μ, m), где $\mu \in M(X)$ — неотрицательная мера и $m\colon X \to \overline{\mathbb{N}}$ — борелевская функция. Пару (μ, m) будем называть *приведенной*, если $m(\lambda) > 0$ μ-п.в. Две приведенные пары (μ, m) и (μ', m') будем называть *эквивалентными*, если $\mu \sim \mu'$ и $m(\lambda) = m'(\lambda)$ μ-п.в. Для заданной борелевской функции $m\colon X \to \overline{\mathbb{N}}$ и каждого $p \in \overline{\mathbb{N}}$ положим $X_p^m = \{\lambda \in X : m(\lambda) = p\}$. Наконец, определим меру $\mu_p \in M(X)$ формулой $\mu_p(B) = \mu(B \cap X_p)$.

Теорема 10.7 (о классификации). *Существуют биекции множеств*

$$\left\{\begin{array}{c}\text{классы изометрического изоморфизма}\\ \text{сепарабельных унитальных}\\ \text{гильбертовых } C(X)\text{-модулей}\end{array}\right\} \rightleftarrows$$

$$\rightleftarrows \left\{\begin{array}{c}\text{классы эквивалентности приведенных пар } (\mu, m)\text{, где}\\ \mu \in M(X) \text{ — неотрицательная мера,}\\ m\colon X \to \overline{\mathbb{N}} \text{ — борелевская функция}\end{array}\right\}$$

Отображение, действующее слева направо, сопоставляет каждому модулю его скалярную спектральную меру и функцию кратности. Отображение, действующее справа налево, сопоставляет паре (μ, m) гильбертов $C(X)$-модуль

$$\dot{\bigoplus_{p\in\overline{\mathbb{N}}}} pL^2(X, \mu_p) \cong \dot{\bigoplus_{p\in\overline{\mathbb{N}}}} pL^2(X_p^m, \mu).$$

Доказательство. Достаточно объединить теорему 10.6, теорему 10.2 (см. также пример 10.8) и упражнение 10.11. □

Для полноты картины сформулируем аналоги теорем 10.6 и 10.7 в терминах операторов. В дальнейшем символ $\cong$ в применении к операторам будет обозначать унитарную эквивалентность.

Теорема 10.8 (спектральная теорема). *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Тогда:*

I. *Для любого нормального оператора $T \in \mathscr{B}(H)$ существуют неотрицательная мера $\mu \in M(\sigma(T))$ и приведенное измеримое гильбертово расслоение $\mathscr{H} = \{H(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$ над $\big(\sigma(T), \mathscr{B}or(\sigma(T)), \mu\big)$ такие, что*

$$T \cong \int_{\sigma(T)}^{\oplus} \lambda \mathbf{1}_{H(\lambda)}\, d\mu(\lambda).$$

При этом μ является скалярной спектральной мерой для T.

II. *Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ и $T' \in \mathscr{B}(H')$ — нормальные операторы в сепарабельных гильбертовых пространствах H и H' соответственно, μ и μ' — их скалярные спектральные меры, $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$ — соответствующие приведенные измеримые гильбертовы расслоения. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *T и T' унитарно эквивалентны;*
(ii) *$\sigma(T) = \sigma(T')$, $\mu \sim \mu'$, и $\dim H(\lambda) = \dim H'(\lambda)$ μ-п.в.*

Таким образом, если μ_T — скалярная спектральная мера оператора T, а m_T — его функция кратности, то тройка $(\sigma(T), \mu_T, m_T)$ является полным набором унитарных инвариантов оператора T. Это и есть обещанное обобщение классической теоремы из линейной алгебры (10.3) на бесконечномерный случай. Соответствующая классификационная теорема для операторов выглядит следующим образом:

Теорема 10.9 (о классификации). *Существуют биекции множеств*

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{классы унитарной эквивалентности}\\ \textit{нормальных операторов}\\ \textit{в сепарабельных гильбертовых пространствах}\end{array}\right\} \rightleftarrows$$

$$\rightleftarrows \left\{\begin{array}{c}\textit{тройки вида } (K,\mu,m)\textit{:}\\ K \subset \mathbb{C} \textit{ — компакт,}\\ (\mu,m) \textit{ — класс эквивалентности}\\ \textit{приведенной пары } (\mu,m)\textit{, где}\\ \mu \in M(K) \textit{ — неотрицательная мера,}\\ \textit{такая, что } \operatorname{supp}\mu = K,\\ m\colon K \to \overline{\mathbb{N}} \textit{ — борелевская функция}\end{array}\right\}$$

Отображение, действующее слева направо, сопоставляет каждому оператору его спектр, скалярную спектральную меру и функцию кратности. Отображение, действующее справа налево, сопоставляет тройке (K,μ,m) оператор $\dot{\bigoplus}_{p\in\overline{\mathbb{N}}} pM_t^{\mu_p}$. Здесь через $M_t^{\mu_p}$ обозначен оператор в гильбертовом пространстве $L^2(K,\mu_p) \cong L^2(K_p^m,\mu)$, действующий по формуле $f \mapsto (z \mapsto zf(z))$.

Доказательство. Следует из теорем 10.7 и 10.8 и упражнения 9.24. $\square$

Замечание 10.4. Представление оператора T в виде $\dot{\bigoplus}_{p\in\overline{\mathbb{N}}} pM_t^{\mu_p}$, указанное в последней теореме — это и есть то «упорядоченное разложение» оператора в сумму операторов умножения, которое упоминалось в замечании 9.6.

Чтобы лучше понять, как «работает» теорема о классификации и какая от нее польза, сделайте следующие упражнения.

Упражнение 10.12. Для следующих операторов $S \in \mathscr{B}(H)$ и $T \in \in \mathscr{B}(K)$ выясните, являются ли они унитарно эквивалентными. В тех случаях, когда это так, постройте унитарную эквивалентность в явном виде.

1. $H = K = L^2[0,1]$, $(Sf)(t) = tf(t)$, $(Tf)(t) = t^2 f(t)$.
2. $H = L^2[0,1]$, $K = L^2[-1,1]$, $(Sf)(t) = tf(t)$, $(Tf)(t) = t^2 f(t)$.
3. $H = L^2[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $K = L^2(\mathbb{R})$, $(Sf)(t) = tf(t)$, $(Tf)(t) = \operatorname{arctg} t \cdot f(t)$.

Упражнение 10.13. Найдите скалярную спектральную меру и функцию кратности диагонального оператора в ℓ^2.

Упражнение 10.14. Найдите скалярную спектральную меру и функцию кратности операторов сдвига в $L^2(\mathbb{T})$ и $L^2(\mathbb{R})$.

Упражнение 10.15. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, μ — его скалярная спектральная мера, m — функция кратности. Докажите, что T является $*$-циклическим тогда и только тогда, когда $m = 1$ μ-п.в.

Кстати, полезно сопоставить результат предыдущих трех упражнений с упражнениями 9.6 и 9.7; см. также замечание 9.3.

Упражнение 10.16. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, μ — его скалярная спектральная мера, m — функция кратности. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

1. $m = \infty$ μ-п.в.;
2. $T \cong T \oplus T$;
3. $T \cong S \oplus S \oplus S \oplus \ldots$ для некоторого $*$-циклического $S \in \mathscr{B}(H')$.

Упражнение 10.17. Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\mu_1, \mu_2 \in M(X)$ — неотрицательные меры, которые *взаимно сингулярны*, т.е. существует разбиение $X = X_1 \sqcup X_2$ пространства X на два борелевских подмножества такое, что $\mu_1(X_2) = 0$ и $\mu_2(X_1) = 0$. Рассмотрим гильбертовы $C(X)$-модули $H_i = L^2(X, \mu_i)$ $(i = = 1, 2)$. Опишите все морфизмы из H_1 в H_2.

Иногда унитарно эквивалентные операторы выглядят на первый взгляд совсем непохожими:

Упражнение 10.18*. Пусть $I = [0,1] \times [0,1]$ — квадрат с мерой Лебега, $H = L^2(I)$, $K = L^2(\mathbb{R})$. Рассмотрим операторы $S \in \mathscr{B}(H)$ и $T \in \mathscr{B}(K)$, действующие по формулам $(Sf)(x,y) = xy\,f(x,y)$ и $(Tf)(x) = \frac{1}{2}(\sin x + 1)\,f(x)$. Докажите, что S и T унитарно эквивалентны.

Замечание 10.5. Из предыдущих упражнений напрашивается такой вывод: функция кратности оператора умножения $M_f \in \mathscr{B}(L^2(X,\mu))$ на существенно ограниченную измеримую функцию $f\colon X \to \mathbb{C}$ сопоставляет каждому $\lambda \in \sigma(M_f)$ число точек в прообразе $f^{-1}(\lambda)$. Строго говоря, это не совсем так: нужно брать не прообраз, а так называемый *существенный прообраз*. О том, что это такое, можно прочитать в статье [33].

Литературные указания

Геометрическая модель гильбертова $C(X)$-модуля, обсуждавшаяся в этой главе, описана в ряде книг по операторным алгебрам (на русском языке см. [2]), однако изложение обычно ведется в терминах алгебр фон Нойманна. Для случая одного самосопряженного оператора см. также классическую монографию И. М. Гельфанда и Н. Я. Виленкина [6]. Подход, принятый в данных лекциях, наиболее близко соответствует книге [39]. Используемая нами терминология заимствована из нескольких недавних статей (по-видимому, термин «измеримое гильбертово расслоение» постепенно вытесняет собой термин «измеримое поле гильбертовых пространств»). Теорема о классификации самосопряженных операторов доказана в [30, 35] без использования языка гильбертовых расслоений (см. теорему 10.9). По поводу несколько иного подхода (в духе теории меры) см. [33]. Приведенное нами доказательство теоремы о классификации несколько отличается от традиционных и представляет собой попытку их «геометризации».

В несепарабельном случае теория кратности выглядит заметно сложнее и описана в книге П. Халмоша [40].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Атья М. *Лекции по K-теории.* — М.: Мир, 1967.

[2] Браттели У., Робинсон Д. *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.* — М.: Мир, 1982.

[3] Букур И., Деляну А. *Введение в теорию категорий и функторов.* — М.: Мир, 1972.

[4] Бурбаки Н. *Спектральная теория.* — М.: Мир, 1972.

[5] Гамелин Т. *Равномерные алгебры.* — М.: Мир, 1973.

[6] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.* (Серия «Обобщенные функции», вып. 4). — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.

[7] Гельфанд С. И., Манин Ю. И. *Методы гомологической алгебры. I. Введение в теорию когомологий и производные категории.* — М.: Наука, 1988.

[8] Гофман К. *Банаховы пространства аналитических функций.* — М.: ИЛ, 1963.

[9] Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. I. Общая теория.* — М.: ИЛ, 1962.

[10] Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. II. Спектральная теория.* — М.: Мир, 1966.

[11] Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. III. Спектральные операторы.* — М.: Мир, 1974.

[12] Диксмье Ж. *C^*-алгебры и их представления.* — М.: Наука, 1974.

[13] Келли Дж. *Общая топология.* — М.: Наука, 1981.

[14] Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. *Теоремы и задачи функционального анализа.* — М.: Наука, 1988.

[15] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* — М.: Наука, 1976.

[16] Ламбек И. *Кольца и модули.* — М.: Мир, 1971.

[17] Маклейн С. *Категории для работающего математика.* — М.: Физматлит, 2004.

[18] Манин Ю. И. *Лекции по алгебраической геометрии. I. Аффинные схемы.* — М.: МГУ, 1970.

[19] Мануйлов В. М., Троицкий Е. В. *C^*-гильбертовы модули.* — М.: Факториал, 2001.

[20] Мерфи Дж. *C^*-алгебры и теория операторов.* — М.: Факториал, 1997.

[21] Наймарк М. А. *Нормированные кольца.* — М.: Наука, 1968.

[22] Постников М. М. *Основы теории гомотопий.* — М.: Наука, 1984.

[23] Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики. 1. Функциональный анализ.* — М.: Мир, 1977.

[24] Рид М. *Алгебраическая геометрия для всех.* — М.: Мир, 1991.

[25] Робертсон А., Робертсон В. *Топологические векторные пространства.* — М.: Мир, 1967.

[26] Рудин У. *Функциональный анализ.* — М.: Мир, 1975.

[27] Соловьев Ю. П., Троицкий Е. В. *C^*-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии.* — М.: Факториал, 1996.

[28] Халмош П. *Гильбертово пространство в задачах.* — М.: Мир, 1970.

[29] Хелемский А. Я. *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии.* — М.: Наука, 1989.

[30] Хелемский А. Я. *Лекции по функциональному анализу.* — М.: МЦНМО, 2004.

[31] Хьюитт Э., Росс К. *Абстрактный гармонический анализ. I.* — М.: Наука, 1975.

[32] Эдвардс Р. *Функциональный анализ.* — М.: Мир, 1969.

[33] Abrahamse, M. B. *Multiplication operators.* Hilbert space operators (Proc. Conf., Calif. State Univ., Long Beach, Calif., 1977), 17–36, Lecture Notes in Math., 693, Springer, Berlin, 1978.

[34] Connes, A. *Noncommutative geometry.* Academic Press, 1994.

[35] Conway, J. B. *A course in Functional Analysis.* Springer, New York, 1985.

[36] Douglas, R. G.; Paulsen, V. I. *Hilbert modules over function algebras.* Longman Research Notes 217, 1989.

[37] Edwards, R. E. *Integration and harmonic analysis on compact groups.* Cambridge Univ. Press, 1972.

[38] Eilenberg, S.; MacLane, S. *General theory of natural equivalences.* Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945), no. 2, 231–294.

[39] Guichardet, A. *Special topics in topological algebras.* Gordon and Breach, New York, 1968.

[40] Halmos, P. *Introduction to Hilbert Space and the theory of Spectral Multiplicity.* Chelsea Publishing Company, New York, 1951.

[41] Higson, N,; Roe, J. *Introduction to Noncommutative Geometry.* Clay Symposium Lectures, 2000. (`http://www.math.psu.edu/gfa/ClaySymposium/Overview.html`)

[42] Landi, G. *An introduction to noncommutative spaces and their geometries.* Springer-Verlag, 1997. Preprint arXiv.org:hep-th/9701078.

[43] Laursen, K. B.; Neumann, M. M. *An introduction to local spectral theory.* Oxford, Clarendon Press, 2000.

[44] Pisier, G. *A polynomially bounded operator on Hilbert space which is not similar to a contraction.* J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 2, 351–369.

[45] Taylor, J. L. *A general framework for a multi-operator functional calculus*, Adv. Math. **9** (1972), 183–252.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ