Спектральная теория и функциональные исчисления
для линейных операторов

Лекция 1.
Введение: задача о функциональном исчислении.

Во многих областях математики и математической физики приходится иметь дело с функциями от линейных операторов. Простейший пример, знакомый Вам со второго курса: чтобы решать системы линейных дифференциальных уравнений, полезно уметь брать экспоненту от оператора. Другой источник таких задач — квантовая механика. В математической модели квантовой механики, предложенной фон Нойманном в 30-ых гг. прошлого века, линейные операторы играют роль наблюдаемых (т.е. тех или иных физических характеристик исследуемой системы, которые мы хотим измерить, таких, как координата, импульс, энергия ...) Часто бывает так, что одна наблюдаемая является функцией от другой или нескольких других (например, энергия выражается через координату и импульс). Вот и приходится подставлять в качестве аргументов функции не числа, а операторы. Основная сложность в том, что операторов обычно несколько, и они не коммутируют. Мы будем иметь дело в основном с функциями от одного оператора; но уже и в этом случае, как мы вскоре увидим, есть много интересных задач.

Говоря нестрого, задача о функциональном исчислении состоит в том, чтобы научиться придавать смысл выражению $f(T)$, где $T\colon E \to E$ — линейный оператор в комплексном[1] линейном пространстве E, а f — функция, заданная на каком-либо подмножестве комплексной плоскости.

Вы, конечно, хорошо знаете, что от любого линейного оператора можно «брать многочлены»: если $p \in \mathbb{C}[t]$ — многочлен, $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$, то $p(T)$ — это оператор $a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0 \mathbf{1}_E$ (здесь и далее $\mathbf{1}_E$ — тождественный оператор в E). Какие еще функции можно брать от T? Чтобы разобраться в этом вопросе, посмотрим на два простых, но важных примера.

Пример 1. Пусть $E = \mathbb{C}^n$, и пусть оператор T записывается в каком-либо базисе диагональной матрицей:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что для любого многочлена $p \in \mathbb{C}[t]$ оператор $p(T)$ записывается в том же базисе так:

$$p(T) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Правая часть последнего равенства имеет смысл, если вместо многочлена p в нее подставить любую функцию f — лишь бы она была определена в $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Поэтому для любого подмножества $M \subset \mathbb{C}$, такого, что $M \supset \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, и любой $f\colon M \to \mathbb{C}$ можно

[1] В дальнейшем все события будут разворачиваться над полем комплексных чисел.

положить *по определению*

$$f(T) := \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Какими свойствами обладает построенное «функциональное исчисление» от T, имеет ли оно право так называться, и что следует называть функциональным исчислением в общем случае (т.е. для произвольного T)? Общепринятый подход к понятию функционального исчисления выглядит следующим образом. Обозначим через $\mathscr{L}(E)$ пространство всех линейных операторов, действующих в E, и рассмотрим отображение $\gamma_p \colon \mathbb{C}[t] \to \mathscr{L}(E)$, сопоставляющее каждому многочлену p оператор $p(T)$. Это отображение называется *полиномиальным исчислением* от T. Очевидно, γ_p обладает следующими свойствами:

1) γ_p линейно;

2) $\gamma_p(fg) = \gamma_p(f)\gamma_p(g)$ для любых $f, g \in \mathbb{C}[t]$;

3) $\gamma_p(1) = \mathbf{1}_E$;

4) $\gamma_p(t) = T$ (где $t \in \mathbb{C}[t]$ — «независимая переменная»).

Условия 1)–3) означают в точности, что γ_p — гомоморфизм алгебр, а условие 4) однозначно определяет этот гомоморфизм. Простейший, но весьма полезный принцип, лежащий в основе алгебраического подхода к теории операторов, состоит в следующем:

> *Задать линейный оператор $T \colon E \to E$ — это все равно, что задать гомоморфизм $\mathbb{C}[t] \to \mathscr{L}(E)$.*

В самом деле, каждый оператор T задает гомоморфизм $\gamma_p \colon \mathbb{C}[t] \to \mathscr{L}(E)$, и обратно, любой гомоморфизм $\varphi \colon \mathbb{C}[t] \to \mathscr{L}(E)$ является полиномиальным исчислением от оператора $T = \varphi(t)$.

Теперь мы можем сформулировать задачу о функциональном исчислении более строго. Пусть $M \subset \mathbb{C}$, и пусть A — какая-либо алгебра функций на M (относительно поточечных операций), содержащая ограничения на M всех многочленов. Обозначим через $r \colon \mathbb{C}[t] \to A$ гомоморфизм ограничения: $r(p) = p|_M$. Задача о функциональном исчислении ставится так:

Существует ли гомоморфизм $\gamma_A \colon A \to \mathscr{L}(E)$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[t] \arrow[r, "\gamma_p"] \arrow[d, "r"'] & \mathscr{L}(E) \\ A \arrow[ur, dashed, "\gamma_A"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

коммутативной?

Обозначим через $F(M)$ алгебру всех комплекснозначных функций на множестве $M \subset \mathbb{C}$. Результат, полученный в примере 1, теперь можно переформулировать следующим образом:

Предложение 1. *Пусть $E = \mathbb{C}^n$. Предположим, что оператор $T \in \mathscr{L}(E)$ в некотором базисе записывается диагональной матрицей с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на диагонали. Тогда для любого множества $M \subset \mathbb{C}$, такого, что $M \supset \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, задача* (1) *разрешима для $A = F(M)$.*

Упражнение 1. Покажите, что условие $M \supset \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ не только достаточно, но и необходимо для разрешимости задачи (1) с $A = F(M)$.

Множество $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, фигурирующее выше — это не что иное, как спектр $\sigma(T)$ оператора T. Напомним, что *спектром* линейного оператора $T \in \mathscr{L}(E)$, действующего в конечномерном векторном пространстве E, называется множество его собственных значений, т.е. таких $\lambda \in \mathbb{C}$, что $Tx = \lambda x$ для некоторого ненулевого $x \in E$. (Для произвольного E спектр определяется по-другому; об этом — чуть позже.) Ситуация, описанная в предложении 1 и упражнении 1 — совершенно типичная для теории операторов; она указывает на взаимосвязь понятий спектра и функционального исчисления. Утверждения типа *«такой-то оператор T обладает функциональным исчислением для такой-то алгебры A на множестве M тогда и только тогда, когда M содержит $\sigma(T)$»*, встретятся нам на протяжении курса неоднократно.

Итак, нам предстоит иметь дело с задачами типа (1). В качестве E у нас будет выступать бесконечномерное банахово (или даже гильбертово) пространство, а операторы будут ограниченными (так что вместо $\mathscr{L}(E)$ в диаграмме (1) будет стоять алгебра $\mathscr{B}(E)$ ограниченных операторов в E). Алгебры A и $\mathscr{B}(E)$, как правило, будут снабжаться какими-либо топологиями; при этом мы будем требовать, чтобы гомоморфизм γ_A был непрерывным.

По сравнению с ситуацией, рассмотренной в примере 1, в бесконечномерном случае возникает целая серия вопросов. Во-первых, надо дать «правильное» определение спектра оператора: дело в том, что собственных значений у оператора в бесконечномерном пространстве может попросту не оказаться. Далее, если мы решим строить функциональное исчисление по аналогии с примером 1, то надо выяснить, какие операторы приводятся к «диагональному виду», и вообще, что такое «диагональный вид» оператора.

Один из центральных результатов классической спектральной теории — *спектральная теорема* — как раз и позволяет приводить *самосопряженные* операторы в гильбертовом пространстве к «диагональному виду», придает точный смысл последнему понятию, и заодно дает возможность строить функциональные исчисления для таких операторов. Чтобы приблизительно представить себе ее формулировку, полезно записать оператор из примера 1 в бескоординатной форме.

Итак, пусть $H = \mathbb{C}^n$, и пусть T — оператор в H, про который дополнительно известно, что он записывается в некотором ортонормированном базисе диагональной матрицей с действительными числами на диагонали. (Это означает в точности, что оператор самосопряжен.) Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — его *различные* собственные значения. Упорядочим их по возрастанию: $\lambda_1 < \dots < \lambda_k$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ пусть $H(\lambda) = \{x \in E : Tx = \lambda x\}$ — соответствующее собственное подпространство. Далее, положим $H_\lambda = \bigoplus_{\mu \leqslant \lambda} H(\mu)$, и обозначим через E_λ ортогональный проектор на H_λ. Мы получаем цепочку подпространств $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$, вложенных друг в друга: $H_\lambda \subset H_\mu$ при $\lambda \leqslant \mu$. Кроме того, $H_\lambda = 0$ при $\lambda < \lambda_1$ и $H_\lambda = H$ при $\lambda \geqslant \lambda_k$. Отметим, что пространство H_λ не меняется на полуинтервале $[\lambda_i, \lambda_{i+1})$ (там оно совпадает с H_{λ_i}), а в каждом собственном значении

λ_i оно делает «скачок»: к нему добавляется прямое слагаемое $H(\lambda_i)$. Тогда тот факт, что T диагонализируется, означает в точности, что

$$T = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}) \tag{2}$$

(здесь мы полагаем $E_{\lambda_0} = 0$). Функциональное исчисление, построенное в примере 1, задается формулой

$$f(T) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j)(E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}).$$

Спектральная теорема представляет собой обобщение двух последних формул на случай бесконечномерного H. Через несколько лекций мы ее сформулируем и докажем, а сейчас ограничимся несколькими нестрогими заявлениями рекламного характера. Для любого самосопряженного оператора T в гильбертовом пространстве H будет построено некое неубывающее семейство подпространств $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ (возрастающее, однако, уже не «скачкообразно», а более или менее произвольным образом), такое, что оператор T представляется в виде

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_\lambda,$$

где интеграл можно понимать как предел интегральных сумм вида (2). Функциональное исчисление от T задается формулой

$$f(T) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, dE_\lambda.$$

В отличие от конечномерного случая, последний интеграл существует не для всех функций, определенных на спектре T (что и понятно — не любую же функцию можно интегрировать!), но все же для весьма широкого их класса.

Как и многие другие важные утверждения в математике, спектральная теорема имеет несколько формулировок, по сути эквивалентных друг другу. Упомянем (опять-таки в рекламных целях) еще об одной. Снова вернемся к конечномерному случаю $H = \mathbb{C}^n$. Тот факт, что оператор $T \in \mathscr{L}(H)$ диагонализируется, означает в точности, что $H = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{R}} H(\lambda)$. Сам оператор при этом разлагается в прямую сумму скалярных (т.е. кратных тождественному) операторов

$$T = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{R}} \lambda \mathbf{1}_{H(\lambda)},$$

а функциональное исчисление приобретает вид

$$f(T) = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{R}} f(\lambda) \mathbf{1}_{H(\lambda)}.$$

Оказывается, и эти формулы обобщаются на бесконечномерный случай, только в них вместо прямой суммы будет стоять так называемый «прямой интеграл»:

$$T = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \lambda \mathbf{1}_{H(\lambda)} \, d\mu(\lambda),$$

$$f(T) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f(\lambda) \mathbf{1}_{H(\lambda)} \, d\mu(\lambda).$$

Конечно, $H(\lambda)$ уже больше не обязаны быть собственными подпространствами T (напомним — собственных подпространств вообще может не быть); более того, они не являются, строго говоря, подпространствами в H. Одна из целей нашего курса — придать смысл всем этим пока что весьма туманным заявлениям.

Итак, от самосопряженных операторов в $\mathbb{C}^n$ можно брать любые функции, определенные на спектре. Что можно сказать про несамосопряженные операторы — опять-таки, для начала, в $\mathbb{C}^n$? Посмотрим на следующий пример.

Пример 2. Пусть оператор $T \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ записывается в каком-либо базисе матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\sigma(T) = \{0\}$. По аналогии с примером 1, хотелось бы научиться брать от нашего оператора функции, определенные в нуле — хотя бы непрерывные. Но проблемы возникают уже с простейшей функцией $f(t) = \sqrt{t}$:

Упражнение 2. Пусть оператор T — такой, как в примере 2. Тогда:
1) Не существует оператора $S \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$, такого, что $S^2 = T$;
2) Более общо, при $n \geqslant 2$ не существует оператора $S \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$, такого, что $S^n = T$;
3) Для оператора T задача (1) неразрешима (даже) для $A = C(\mathbb{R})$.

Оказывается, единственное препятствие состоит в том, что функция $\sqrt[n]{t}$ не дифференцируема в нуле:

Упражнение 3. 1) Для оператора T из примера 2 задача (1) разрешима для $A = C^1(U)$, где $U \subset \mathbb{R}$ — любая окрестность нуля.

2) Пусть $T \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$. Предположим, что $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Тогда для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$, содержащего $\sigma(T)$, задача (1) разрешима для $A = C^{n-1}(U)$.

Пример 2 показывает, что от операторов в $\mathbb{C}^n$ можно брать лишь достаточно гладкие функции. Забегая вперед, скажем, что от ограниченных операторов в банаховом пространстве можно брать, вообще говоря, только аналитические функции. Чем оператор «лучше» (с точки зрения спектральной теории), тем больше запас функций, которые можно к нему применять.

Алгебры и спектры из элементов.

Само понятие спектра носит чисто алгебраический характер и имеет смысл не только для линейных операторов, но и для элементов произвольных ассоциативных алгебр. Напомним следующее

Определение 1. *Алгеброй* (точнее, *комплексной ассоциативной алгеброй*) называется векторное пространство A над полем $\mathbb{C}$, снабженное билинейным оператором $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto ab$, таким, что $(ab)c = a(bc)$ для всех $a, b, c \in A$. Если $ab = ba$ для всех $a, b \in A$, то A называется *коммутативной*. Элемент $1 \in A$ называется *единицей*, если $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для всех $a \in A$. Алгебра, обладающая единицей, называется *унитальной*.

Как всегда, когда мы имеем дело с неким классом множеств с дополнительной структурой, нужно ввести отображения, которые эту структуру «уважают»:

Определение 2. Пусть A, B — алгебры. Отображение $\varphi\colon A \to B$ называется *гомоморфизмом*, если оно линейно, и $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для всех $a, b \in A$. Если A и B унитальны, а 1_A и 1_B — их единицы, то гомоморфизм φ называется *унитальным*, если $\varphi(1_A) = 1_B$.

Алгебры, с которыми нам в дальнейшем предстоит иметь дело, можно условно разделить на два класса: алгебры функций и операторные алгебры. По сути дела, функциональные исчисления от операторов — это гомоморфизмы из первых во вторые. Вот несколько базовых примеров.

Пример 3 (алгебры «функций»). 1) Алгебра многочленов[1] $\mathbb{C}[t]$.

2) Алгебра $F(S)$ (обозначаемая также через $\mathbb{C}^S$), состоящая из всех функций на множестве S, снабженная поточечным умножением.

3) Ее подалгебра $\ell^\infty(S)$, состоящая из ограниченных функций.

Если на множестве S введена какая-либо дополнительная структура, то в $F(S)$ появляется подалгебра, состоящая из функций, которые с этой структурой согласованы:

4) Алгебра $C(\Omega)$ непрерывных функций на топологическом пространстве Ω.

5) Алгебра $C^\infty(M)$ гладких функций на гладком многообразии M.

6) Алгебра $\mathscr{O}(V)$ голоморфных функций на комплексном многообразии V.

Следующие две алгебры состоят, строго говоря, не из функций, но имеют с алгебрами функций много общего.

7) Алгебра $\mathbb{C}(t)$ рациональных функций.

8) Алгебра $\mathbb{C}[[t]]$ формальных степенных рядов. Напомним, что она состоит из формальных выражений вида $\sum_{n=0}^\infty a_n t^n$ (где $a_n \in \mathbb{C}$ — любые числа), а умножение задается формулой $(\sum_n a_n t^n)(\sum_n b_n t^n) = \sum_n c_n t^n$, где $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ (так что $\mathbb{C}[t]$ является подалгеброй в $\mathbb{C}[[t]]$).

Пример 4 (алгебры операторов). На первых порах нам хватит двух примеров:

1) Алгебра $\mathscr{L}(E)$ всех линейных операторов в линейном пространстве E.

2) Алгебра $\mathscr{B}(E)$ всех *ограниченных* линейных операторов в линейном нормированном пространстве E.

Определение 3. Пусть A — унитальная алгебра. Элемент $a \in A$ называется *обратимым*, если существует такой элемент $a^{-1} \in A$, что $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Элемент a^{-1} называется *обратным* к a.

Упражнение 4. Если a обратим, то существует только один элемент, обратный к a.

Множество всех обратимых элементов A образует группу по умножению. В самом деле, если a, b обратимы, то элемент $b^{-1}a^{-1}$ — обратный к ab. Группа обратимых элементов A обозначается через $\mathrm{Inv}(A)$.

Иногда приходится иметь дело с «односторонней обратимостью»:

[1]Как учат в курсе алгебры, многочлен — это не функция, а некое «формальное выражние». Но, поскольку наше основное поле $\mathbb{C}$ бесконечно, мы всегда будем отождествлять многочлен с соответствующей функцией на $\mathbb{C}$.

Определение 4. Пусть A — унитальная алгебра. Элемент $a \in A$ называется *обратимым слева* (соответственно, *обратимым справа*), если существует такой элемент $a_\ell^{-1} \in A$ (соответственно, $a_r^{-1} \in A$), что $a_\ell^{-1}a = 1$ (соответственно, $aa_r^{-1} = 1$).

Упражнение 5. 1) Пусть a обратим слева. Обязательно ли a_ℓ^{-1} — единственный?

2) Если a обратим и слева, и справа, то он обратим, и $a_\ell^{-1} = a_r^{-1} = a^{-1}$.

3) Если A конечномерна и $a \in A$ обратим слева (или справа), то он обратим.

4) Верно ли предыдущее утверждение для произвольной A?

Посмотрим, как выглядят обратимые элементы в рассмотренных выше примерах.

Пример 5. 1) В алгебрах $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}(t)$ любой ненулевой элемент обратим.

2) Многочлен $p \in \mathbb{C}[t]$ обратим $\iff$ $\deg p = 0$ (т.е. p — постоянная функция).

3) Формальный степенной ряд $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$ обратим $\iff$ $a_0 \neq 0$ (проверьте!)

4) Элемент $f \in F(S)$ обратим $\iff$ $f(x) \neq 0$ ни для какого $x \in S$. То же самое верно и в алгебрах $C(\Omega)$, $C^\infty(M)$ и $\mathscr{O}(V)$.

5) Элемент $f \in \ell^\infty(S)$ обратим $\iff$ существует $\varepsilon > 0$, такое, что $|f(x)| > \varepsilon$ для всех $x \in S$.

6) Оператор $T \in \mathscr{L}(E)$ обратим $\iff$ он биективен.

7) Пусть E — банахово пространство. Оператор $T \in \mathscr{B}(E)$ обратим $\iff$ он биективен.

Замечание 1. В отличие от п.6), который тривиален, п.7) — это следствие (на самом деле, эквивалентная формулировка) *теоремы Банаха об обратном операторе*: если линейный ограниченный оператор между банаховыми пространствами биективен, то обратный оператор тоже ограничен.

Упражнение 6. Верно ли утверждение из п.7), если E — (всего лишь) нормированное пространство?

Вот, наконец, основное определение:

Определение 5. Пусть A — унитальная алгебра, и пусть $a \in A$. *Спектром a* называется множество

$$\sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \quad \text{необратим}\}.$$

Пример 6. Пусть $A = F(S)$, и пусть $f \in A$. С учетом примера 5 (4), мы видим, что

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(f) \iff f - \lambda 1 \text{ необратим} &\iff \exists x \in S :\ (f - \lambda 1)(x) = 0 \\ &\iff \exists x \in S :\ f(x) = \lambda \iff \lambda \in f(S). \end{aligned}$$

Таким образом, $\sigma(f) = f(S)$ (спектр функции совпадает с множеством ее значений). Очевидно, аналогичная ситуация имеет место в алгебрах $C(\Omega)$, $C^\infty(M)$ и $\mathscr{O}(V)$.

Замечание 2. Из предыдущего примера видно, что спектр элемента алгебры может быть любым непустым подмножеством в $\mathbb{C}$. В самом деле, если дано $S \subset \mathbb{C}$, $S \neq \varnothing$, то $S = \sigma_A(a)$ для $A = F(S)$ и функции $a(t) = t$.

Упражнение 7. Пусть $f \in \ell^\infty(S)$. Тогда $\sigma_{\ell^\infty(S)}(f) = \overline{f(S)}$ (замыкание множества $f(S)$).

Упражнение 8. 1) Опишите спектры элементов алгебр $\mathbb{C}[t]$, $\mathbb{C}(t)$ и $\mathbb{C}[[t]]$.

2) Придумайте алгебру A и элемент $a \in A$, спектр которого пуст.

Пример 7. Пусть $A = \mathscr{L}(E)$, где E — конечномерное векторное пространство, и пусть $T \in \mathscr{L}(E)$. Тогда $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathbf{1}_E) \neq \{0\}\}$ — множество собственных значений оператора T. Это сразу следует из того факта, что инъективный оператор в конечномерном пространстве обратим.

Упражнение 9. Покажите, что в случае бесконечномерного E это, вообще говоря, не так.

Замечание 3. Конечно, собственные значения оператора всегда принадлежат его спектру, вне зависимости от того, конечномерно E или нет (неинъективный оператор не может быть обратимым).

Посмотрим, как ведут себя спектры под действием гомоморфизмов.

Предложение 2. *Пусть $\varphi\colon A \to B$ — унитальный гомоморфизм.*

(i) *Если $a \in A$ обратим, то и $\varphi(a) \in B$ обратим, и $\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1})$.*

(ii) *$\sigma_B(\varphi(a)) \subset \sigma_A(a)$ для любого $a \in A$.*

Доказательство. (Набросок). Утверждение (i) тривиально, а для доказательства (ii) достаточно применить (i) к элементу $a - \lambda 1$. □

Замечание 4. Как следствие из предыдущего предложения, если A — унитальная алгебра, а $B \subset A$ — подалгебра, содержащая единицу A, то $\sigma_A(b) \subset \sigma_B(b)$ для любого $b \in B$. При этом может оказаться, что $\sigma_A(b) \neq \sigma_B(b)$ (ср. упражнение 7 и пример 6).

Еще одно любопытное свойство спектра состоит в том, что спектр произведения «почти» не зависит от порядка сомножителей. Пусть, по-прежнему, A — унитальная алгебра.

Лемма 1. *Элемент $1 - ab$ обратим $\iff$ $1 - ba$ обратим.*

Наводящее соображение. Предположим, что $A = \mathbb{C}$, и забудем, что умножение в $\mathbb{C}$ коммутативно. Предположим также, что $|a| < 1$ и $|b| < 1$, и положим $c = (1 - ab)^{-1}$. Тогда $c = \sum_{n=0}^\infty (ab)^n$. С другой стороны,

$$(1 - ba)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty (ba)^n = 1 + b\big(1 + ab + (ab)^2 + \cdots\big)a = 1 + bca.$$

Доказательство. Пусть $1 - ab$ обратим, и $c = (1 - ab)^{-1}$. Положим $d = 1 + bca$. Прямая проверка показывает, что $d(1 - ba) = (1 - ba)d = 1$, т.е. $d = (1 - ba)^{-1}$. □

Предложение 3. *Для любых $a, b \in A$ справедливо равенство $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \notin \sigma(ab)$ и $\lambda \neq 0$. Тогда элемент $1 - \lambda^{-1} ab$ обратим. По лемме, $1 - \lambda^{-1} ba$ обратим. Поэтому и $ba - \lambda 1$ обратим, т.е. $\lambda \notin \sigma(ba)$. □

Упражнение 10. 1) Постройте пример алгебры A и элементов $a, b \in A$, таких, что $\sigma(ab) \neq \sigma(ba)$.

2) Если A конечномерна, то $\sigma(ab) = \sigma(ba)$ для любых $a, b \in A$.

Итак, в чисто алгебраической ситуации спектр элемента может быть любым подмножеством $\mathbb{C}$ (см. замечание 2), а может быть и пустым (см. упражнение 8). С другой стороны, мы видели, что спектр любого элемента алгебры $\ell^\infty(S)$ компактен и непуст (см. упражнение 7). Наша ближайшая цель — показать, что последнее свойство имеет место в любой *банаховой* алгебре.

Банаховы алгебры.

Определение 6. *Нормированная алгебра* — это нормированное пространство A над $\mathbb{C}$, снабженное структурой алгебры так, что $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$ для всех $a, b \in A$. Если A унитальна, то дополнительно требуется, чтобы $\|1\| = 1$. *Банахова алгебра* — это полная нормированная алгебра.

Условие $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$ (называемое *субмультипликативностью*, а иногда просто *мультипликативностью* нормы) может показаться на первый взгляд довольно неестественным, не говоря уже об условии $\|1\| = 1$. (Иногда бывает так, что сразу и не скажешь — есть в алгебре единица или нет …). Оказывается, можно добиться выполнения этих двух условий, заменив норму на эквивалентную — лишь бы умножение в A было непрерывно.

Напоминание 1. Пусть E, F — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon E \to F$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен, т.е. существует такое $C > 0$, что $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in E$. Наименьшее C с таким свойством называется *нормой* оператора T.

Упражнение 11. Пусть E, F, G — нормированные пространства. Докажите, что билинейный оператор $R\colon E \times F \to G$ непрерывен $\iff$ он ограничен, т.е. существует такое $C > 0$, что $\|R(x, y)\| \leqslant C\|x\|\|y\|$ для всех $x \in E,\ y \in F$.

Как следствие, умножение в нормированной алгебре непрерывно.

Напоминание 2. Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы на векторном пространстве E. Говорят, что норма $\|\cdot\|_1$ *мажорирует* норму $\|\cdot\|_2$ (и пишут $\|\cdot\|_1 \succ \|\cdot\|_2$ или $\|\cdot\|_2 \prec \|\cdot\|_1$), если существует константа $C > 0$ такая, что $\|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1$ для каждого $x \in E$. Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ *эквивалентны* ($\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$), если $\|\cdot\|_1 \prec \|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_2 \prec \|\cdot\|_1$.

Пусть $\mathscr{T}_i$ — топология на векторном пространстве E, порожденная нормой $\|\cdot\|_i$ ($i = 1, 2$). Тогда

$$\|\cdot\|_1 \succ \|\cdot\|_2 \quad \iff \quad \text{топология } \mathscr{T}_1 \text{ не слабее, чем } \mathscr{T}_2.$$

Как следствие, нормы эквивалентны $\iff$ они задают одну и ту же топологию.

Предложение 4. *Пусть A — алгебра, снабженная нормой, причем оператор умножения $A \times A \to A$ непрерывен. Тогда на A существует субмультипликативная норма $\|\cdot\|'$, эквивалентная исходной. Если A унитальна, то эту норму можно выбрать так, чтобы $\|1\|' = 1$.*

Доказательство. Ввиду упражнения 11, существует $C > 0$, такое, что $\|ab\| \leqslant C\|a\|\|b\|$ для всех $a, b \in A$. Тогда, как легко проверить, норма $\|\cdot\|'' = C\|\cdot\|$ субмультипликативна. Предположим теперь, что A унитальна. Для каждого $a \in A$ рассмотрим оператор $L_a \colon (A, \|\cdot\|'') \to (A, \|\cdot\|'')$, $L_a(b) = ab$, и положим $\|a\|' = \|L_a\|$. Непосредственная проверка показывает, что норма $\|\cdot\|'$ обладает нужными свойствами. □