Спектральная теория и функциональные исчисления
для линейных операторов

Лекция 10.
Борелевское исчисление для нормального оператора.

На прошлой лекции мы выяснили, что любой нормальный элемент унитальной C^*-алгебры обладает непрерывным исчислением на любом компакте в $\mathbb{C}$, содержащем его спектр. Наша очередная задача — продолжить непрерывное исчисление с алгебры непрерывных функций на более широкую алгебру, состоящую из всех ограниченных борелевских функций на этом компакте. В произвольной C^*-алгебре сделать это, вообще говоря, нельзя; тем не менее, мы покажем, что в нашей «главной» C^*-алгебре — алгебре $\mathscr{B}(H)$ — любой нормальный элемент обладает борелевским исчислением. Для этого нам понадобится некоторая подготовка. Для начала мы установим несколько общих фактов об операторах в гильбертовом пространстве.

Операторы и полуторалинейные формы.

Пусть H — векторное пространство (как всегда, над $\mathbb{C}$).

Определение 1. Отображение $\varPhi\colon H\times H\to H$ называется *полуторалинейной формой*, если для любых $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ и любых $x,y,z\in H$ выполнено

1) $\varPhi(\lambda x+\mu y,z)=\lambda\varPhi(x,z)+\mu\varPhi(y,z)$;
2) $\varPhi(x,\lambda y+\mu z)=\bar\lambda\varPhi(x,y)+\bar\mu\varPhi(x,z)$.

Полуторалинейная форма $\varPhi$ называется *эрмитовой*, если $\varPhi(x,y)=\overline{\varPhi(y,x)}$ для любых $x,y\in H$.

Отображение $H\to H$, $x\mapsto\varPhi(x,x)$ называется *квадратичной формой, ассоциированной с $\varPhi$*.

Следующая полезная формула показывает, что полуторалинейная форма полностью восстанавливается по своей квадратичной форме.

Упражнение 1. Если $\varPhi$ — полуторалинейная форма, то справедливо *тождество поляризации*

$$\varPhi(x,y)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k\varPhi(x+i^k y,x+i^k y).$$

Упражнение 2. Полуторалинейная форма $\varPhi$ эрмитова $\iff$ $\varPhi(x,x)\in\mathbb{R}$ для любого $x\in H$.

Пусть теперь H — гильбертово пространство. Каждому линейному (не обязательно ограниченному) оператору $T\colon H\to H$ сопоставим полуторалинейную форму $\varPhi_T$ на H по правилу $\varPhi_T(x,y)=\langle Tx,y\rangle$ $(x,y\in H)$.

Как $\varPhi_T$, так и соответствующая ей квадратичная форма полностью определяют оператор:

Упражнение 3. Если $S,T\colon H\to H$ — линейные операторы, то $S=T \iff \varPhi_S=\varPhi_T \iff \langle Sx,x\rangle=\langle Tx,x\rangle$ для всех $x\in H$.

Замечание 1. Обратите внимание, что над $\mathbb{R}$ это не так: достаточно рассмотреть поворот на 90° на плоскости.

Упражнение 4. 1) Оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ самосопряжен $\iff$ форма Φ_T эрмитова $\iff$ $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ для всех $x \in H$.

2) $T \in \mathscr{B}(H)$ изометричен $\iff$ $T^*T = \mathbf{1}$.

3) $U \in \mathscr{B}(H)$ унитарен $\iff$ он изометричен и сюръективен.

Замечание 2. Конечно, п. 2) и 3) из последнего упражнения справедливы и для операторов, действующих между двумя разными гильбертовыми пространствами. Напомним в этой связи об отношении изометрической эквивалентности операторов (см. лекцию 4). Поскольку изометрический изоморфизм гильбертовых пространств автоматически унитарен (т.е. сохраняет скалярные произведения), для операторов, действующих в гильбертовых пространствах, вместо термина «*изометрическая эквивалентность*» обычно употребляют термин «*унитарная эквивалентность*».

Мы уже видели, что такие свойства оператора, как «быть унитарным», «быть ортопроектором», «быть изометрией» могут быть определены как в геометрических терминах, так и в алгебраических. Вот еще два таких свойства:

Определение 2. 1) Оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ называется *коизометрией*, если $TT^* = \mathbf{1}$.

2) Оператор $V \in \mathscr{B}(H)$ называется *частичной изометрией*, если $(V^*V)^2 = V^*V$.

Упражнение 5. Дайте геометрическое определение коизометрии и частичной изометрии.

Итак, каждому оператору T в H соответствует полуторалинейная форма Φ_T. Посмотрим теперь, какие формы соответствуют ограниченным операторам.

Определение 3. Полуторалинейная форма Φ на гильбертовом пространстве H называется *ограниченной*, если существует $C > 0$ такое, что $|\Phi(x, y)| \leqslant C\|x\|\|y\|$ для всех $x, y \in H$. Точная нижняя грань таких C называется *нормой* Φ и обозначается $\|\Phi\|$.

Нетрудно проверить, что так определенная норма действительно является нормой на пространстве всех ограниченных полуторалинейных форм на H. Впрочем, это будет легко следовать из доказанной ниже теоремы.

Пример 1. Легко видеть, что для любого ограниченного оператора T в H форма Φ_T ограничена, и $\|\Phi_T\| \leqslant \|T\|$.

Оказывается, других ограниченных полуторалинейных форм не бывает:

Теорема 1. *Отображение*

$$\mathscr{B}(H) \to \left\{ \begin{array}{l} \textit{пространство полуторалинейных} \\ \textit{ограниченных форм на } H \end{array} \right\}, \qquad T \mapsto \Phi_T$$

— изометрический изоморфизм.

Доказательство. Инъективность отображения $T \mapsto \Phi_T$ следует из упражнения 3.

Пусть Φ — ограниченная полуторалинейная форма. Зафиксируем $y \in H$ и рассмотрим функционал $\Phi^y \colon H \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \Phi(x, y)$. Ясно, что $\Phi^y \in H^*$, и $\|\Phi^y\| \leqslant \|\Phi\|\|y\|$. Поэтому существует единственный вектор $S(y) \in H$, такой, что $\Phi(x, y) = \langle x, S(y)\rangle$ для любого $x \in H$. Из полуторалинейности Φ и скалярного произведения следует, что $S \colon H \to H$ — линейный оператор; кроме того, $\|S(y)\| = \|\Phi^y\| \leqslant \|\Phi\|\|y\|$ для любого $y \in H$, т.е. S ограничен, и $\|S\| \leqslant \|\Phi\|$. Положим $T = S^*$; тогда $\Phi = \Phi_T$, так что отображение $T \mapsto \Phi_T$ — сюръекция. Наконец, изометричность этого отображения сразу следует из цепочки неравенств $\|T\| = \|S\| \leqslant \|\Phi_T\| \leqslant \|T\|$. $\square$

Комплексные меры

Для построения борелевского исчисления нам понадобятся некоторые факты из теории меры. Некоторые из них — совсем простые (и будут предложены в качестве упражнений); остальные мы приведем без доказательства.

Пусть X — множество, $\mathscr{A} \subset 2^X$ — σ-алгебра его подмножеств.

Определение 4. Отображение $\mu \colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ называется *комплексной мерой*, если

1) $\mu(\varnothing) = 0$;
2) $\mu(\bigsqcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ для попарно не пересекающихся $A_i \in \mathscr{A}$.

Если второе свойство выполнено и для счетных семейств, то μ называется *σ-аддитивной*.

Определение 5. Говорят, что мера μ имеет *ограниченную вариацию*, если существует $C > 0$ такое, что для любого конечного набора $\{A_i\}_{i=1}^n$ попарно не пересекающихся множеств из $\mathscr{A}$ выполнено $\sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| \leqslant C$.

Очевидно, любая неотрицательная мера имеет ограниченную вариацию.

Утверждение 1. *Любая σ-аддитивная мера имеет ограниченную вариацию.*

Определение 6. Пусть μ — мера ограниченной вариации на $\mathscr{A}$. Ее *вариацией* называется функция $|\mu| \colon \mathscr{A} \to [0, +\infty)$, заданная формулой

$$|\mu|(A) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| : A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i,\ A_i \in \mathscr{A}\Big\}.$$

Утверждение 2. *$|\mu|$ является мерой на $\mathscr{A}$.*

Обозначим через $\mathcal{M}_{\mathscr{A}}(X)$ множество всех комплексных мер ограниченной вариации на $\mathscr{A}$. Очевидно, $\mathcal{M}_{\mathscr{A}}(X)$ — векторное пространство.

Утверждение 3. *Функция $\mu \mapsto \|\mu\| = |\mu|(X)$ является нормой на $\mathcal{M}_{\mathscr{A}}(X)$. Относительно этой нормы $\mathcal{M}_{\mathscr{A}}(X)$ является банаховым пространством.*

Напомним (см. лекцию 2), что через $B_{\mathscr{A}}(X)$ мы обозначаем банахову алгебру всех ограниченных $\mathscr{A}$-измеримых функций на X. Для каждого подмножества $A \subset X$ через χ_A обозначим его характеристическую функцию (индикатор). Положим

$$S_{\mathscr{A}}(X) = \operatorname{span}\{\chi_A : A \in \mathscr{A}\} \subset B_{\mathscr{A}}(X).$$

Функции из $S_{\mathscr{A}}(X)$ будем называть *$\mathscr{A}$-простыми*. Легко убедиться (убедитесь), что $S_{\mathscr{A}}(X)$ — подалгебра в $B_{\mathscr{A}}(X)$.

Упражнение 6. $S_{\mathscr{A}}(X)$ плотно в $B_{\mathscr{A}}(X)$.

Упражнение 7. Для любой меры $\mu \in \mathcal{M}_{\mathscr{A}}(X)$ существует единственный функционал $I_\mu \in B_{\mathscr{A}}(X)^*$ такой, что $I_\mu(\chi_A) = \mu(A)$ для любого $A \in \mathscr{A}$.

Определение 7. Для любой $f \in B_{\mathscr{A}}(X)$ величина $I_\mu(f)$ называется *интегралом* f по мере μ и обозначается $\int_X f(x)\, d\mu(x)$.

Теорема 2 (Хильдебрандт, Канторович). *Отображение*

$$\mathcal{M}_{\mathscr{A}}(X) \to B_{\mathscr{A}}(X)^*, \qquad \mu \mapsto I_\mu$$

— изометрический изоморфизм банаховых пространств.

Пусть теперь X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\mathscr{A} = \mathscr{B}or(X)$ — σ-алгебра его борелевских подмножеств. В этом случае вместо $B_{\mathscr{A}}(X)$, $S_{\mathscr{A}}(X)$ и $\mathcal{M}_A(X)$ мы будем писать $B(X)$, $S(X)$ и $\mathcal{M}(X)$ соответственно.

Определение 8. *Борелевская мера на* X — это комплексная мера на $\mathscr{B}or(X)$.

Определение 9. Борелевская мера μ на X называется *регулярной*, если для каждого $B \in \mathscr{B}or(X)$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдутся открытое множество $U \supset B$ и компакт $K \subset B$ такие, что $|\mu|(U \setminus K) < \varepsilon$.

Утверждение 4. *Регулярная борелевская мера на компакте σ-аддитивна.*

Замечание 3. Для метризуемых компактов верно и обратное: любая σ-аддитивная борелевская мера регулярна.

Обозначим через $M(X) \subset \mathcal{M}(X)$ подмножество, состоящее из регулярных мер.

Утверждение 5. *$M(X)$ — замкнутое векторное подпространство в $\mathcal{M}(X)$ (и, следовательно, является банаховым пространством).*

Вот ключевая теорема, которой мы в дальнейшем будем неоднократно пользоваться:

Теорема 3 (Рисс, Марков, Какутани). *Отображение*

$$M(X) \to C(X)^*, \qquad \mu \mapsto I_\mu$$

— изометрический изоморфизм банаховых пространств.

Замечание 4. Обозначим через $j_M \colon M(X) \to \mathcal{M}(X)$ и $j_C \colon C(X) \to B(X)$ тождественные вложения. С учетом теорем Хильдебрандта-Канторовича и Рисса-Маркова-Какутани, сопряженный оператор j_C^* действует из $\mathcal{M}(X)$ в $M(X)$. Можно показать, что $j_C^* \circ j_M = \mathbf{1}_{M(X)}$. Отсюда следует, что $M(X)$ — дополняемое подпространство в $\mathcal{M}(X)$, а j_C^* — проектор из $\mathcal{M}(X)$ на $M(X)$. (Этот проектор в некотором смысле «регуляризует» произвольную борелевскую меру ограниченной вариации.)

Слабо-мерная топология на $B(X)$

Пусть по-прежнему X — компактное хаусдорфово топологическое пространство. Каждой функции $f \in B(X)$ сопоставим функционал $F_f \in M(X)^*$, действующий по формуле $F_f(\mu) = \int_X f\,d\mu$. Полученное отображение $B(X) \to M(X)^*$ обозначим через $\varkappa$. Если отождествить $M(X)$ с $C(X)^*$, то легко видеть, что $\varkappa\colon B(X) \to C(X)^{**}$ — продолжение канонического вложения $i_{C(X)}\colon C(X) \hookrightarrow C(X)^{**}$. С другой стороны, мы можем отождествить $\mathcal{M}(X)$ с $B(X)^*$, и тогда $F_f \in M(X)^*$ — это ограничение на $M(X)$ функционала $i_{B(X)}(f) \in \mathcal{M}(X)^*$, где $i_{B(X)}\colon B(X) \hookrightarrow B(X)^{**} = \mathcal{M}(X)^*$ — каноническое вложение (см. рис.):

$$\begin{tikzcd}
B(X) \arrow[r, "i_{B(X)}"] \arrow[rrd, "\varkappa"] & B(X)^{**} \arrow[r, equal, "\sim"] & \mathcal{M}(X)^* \arrow[d, "j_M^*"] \\
C(X) \arrow[u, "j_C"] \arrow[r, "i_{C(X)}"'] & C(X)^{**} \arrow[r, equal, "\sim"] & M(X)^*
\end{tikzcd}$$

Из сказанного следует, что $\|\varkappa(f)\| \leqslant \|f\|$ для любой $f \in B(X)$. На самом деле, можно сказать больше:

Упражнение 8. $\varkappa\colon B(X) \to M(X)^*$ — изометрия.
Указание. Примените $\varkappa(f)$ к мере, сосредоточенной в одной точке.

Упражнение 9. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» изометричности $\varkappa$:

"Для любой $f \in B(X)$ имеем $\varkappa(f) \in C(X)^{**}$, а $C(X)^{**}$ изометрически вкладывается в $B(X)^{**}$, поэтому $\varkappa(f)$ лежит в $B(X)^{**}$ и, очевидно, совпадает с образом f при каноническом вложении $B(X) \hookrightarrow B(X)^{**}$. Поскольку последнее изометрично, мы получаем $\|\varkappa(f)\| = \|f\|$."

Итак, $\varkappa$ инъективно отображает $B(X)$ в $M(X)^*$. Это позволяет дать следующее

Определение 10. *Слабо-мерной топологией* на $B(X)$ называется прообраз слабой* топологии $\sigma(M(X)^*, M(X))$ при вложении $\varkappa\colon B(X) \to M(X)^*$.

Слабо-мерную топологию на $B(X)$ мы будем обозначать символом wm. По определению, она задается семейством полунорм $\{\|\cdot\|_\mu : \mu \in M(X)\}$, где $\|f\|_\mu = |\int_X f\,d\mu|$.

Упражнение 10*. Последовательность $f_n \in B(X)$ сходится к $f \in B(X)$ в wm $\iff$ она равномерно ограничена и сходится к f поточечно.

Напомним, что для любого банахова пространства E образ E при каноническом вложении $i_E\colon E \to E^{**}$ замкнут в E^{**} по норме (и уж подавно не плотен там, если только E не рефлексивно). Однако в E^{**} есть и другая топология, а именно, $\sigma(E^{**}, E^*)$. Оказывается, верно следующее:

Упражнение 11. $\operatorname{Im} i_E$ плотен в E^{**} относительно топологии $\sigma(E^{**}, E^*)$.

Следовательно, $\operatorname{Im} i_E$ плотен и в любом «промежуточном» подпространстве $F \subset E^{**}$, его содержащем. В применении к $C(X)$ это дает следующее:

Следствие 1. *$C(X)$ плотно в $B(X)$ относительно слабо-мерной топологии.*

Напомним, что на $C(X)$ и на $B(X)$ есть инволюция, заданная формулой $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Относительно этой инволюции $C(X)$ и $B(X)$ являются инволютивными банаховыми алгебрами (и даже C^*-алгебрами; см. примеры 15 и 16 из лекции 8).

Определение 11. Инволютивная полинормированная алгебра — это полинормированная алгебра, снабженная непрерывной инволюцией.

Предложение 1. *$(B(X), wm)$ — инволютивная полинормированная алгебра.*

Доказательство. Зафиксируем функцию $f \in B(X)$ и покажем, что оператор умножения $L_f\colon B(X) \to B(X)$, $g \mapsto fg$ непрерывен в слабо-мерной топологии. Для произвольной $\mu \in M(X)$ определим борелевскую меру $f \cdot \mu$ формулой $(f \cdot \mu)(A) = \int_A f\, d\mu$. Из регулярности μ и очевидной оценки $|(f \cdot \mu)(A)| \leqslant |\mu|(A)\|f\|_\infty$ следует регулярность $f \cdot \mu$. Далее, для любой простой $g \in S(X)$ мы имеем $\int_X fg\, d\mu = \int_X g\, d(f \cdot \mu)$. Поскольку обе части последнего равенства непрерывно зависят от $g \in B(X)$ (по равномерной норме), а $S(X)$ плотно в $B(X)$, мы видим, что это равенство выполнено и для любой $g \in B(X)$. Отсюда следует, что $\|fg\|_\mu = \|g\|_{f\cdot\mu}$ для любой $g \in B(X)$, поэтому $L_f\colon g \mapsto fg$ непрерывен в слабо-мерной топологии (см. упр. 12 из лекции 5). Следовательно, $(B(X), wm)$ — полинормированная алгебра. Непрерывность инволюции следует из равенства $\|f^*\|_\mu = \|f\|_{\bar\mu}$. $\square$

Упражнение 12. Если X бесконечно, то умножение в $(B(X), wm)$ не является совместно непрерывным. С другой стороны, оно является секвенциально совместно непрерывным (т.е. если $f_n \to f$ и $g_n \to g$ в wm, то $f_n g_n \to fg$ в wm).

Слабо-операторная топология на $\mathscr{B}(H)$

Пусть H — гильбертово пространство. Для каждых $x, y \in H$ определим полунорму $\|\cdot\|_{x,y}$ на $\mathscr{B}(H)$, полагая $\|T\|_{x,y} = |\langle Tx, y\rangle|$ для каждого $T \in \mathscr{B}(H)$.

Определение 12. Топология на $\mathscr{B}(H)$, задаваемая системой полунорм $\{\|\cdot\|_{x,y} : x, y \in H\}$, называется *слабо-операторной топологией* и обозначается через wo.

Упражнение 13*. Обозначим через $\mathscr{F}(H)$ пространство всех ограниченных операторов в H с конечномерным образом. Постройте изоморфизм $(\mathscr{B}(H), wo)^* \cong \mathscr{F}(H)$.

Предложение 2. *$(\mathscr{B}(H), wo)$ — инволютивная полинормированная алгебра.*

Доказательство. Для любых $S, T \in \mathscr{B}(H)$ и любых $x, y \in H$ справедливы равенства $\|ST\|_{x,y} = |\langle STx, y\rangle| = \|S\|_{Tx,y}$. Отсюда следует, что оператор правого умножения $R_T\colon \mathscr{B}(H) \to \mathscr{B}(H)$, $S \mapsto ST$ непрерывен в слабо-операторной топологии. С другой стороны, $\|ST\|_{x,y} = |\langle Tx, S^*y\rangle| = \|T\|_{x,S^*y}$, поэтому и оператор левого умножения $L_S\colon \mathscr{B}(H) \to \mathscr{B}(H)$, $T \mapsto ST$ непрерывен в слабо-операторной топологии. Наконец, непрерывность инволюции вытекает из равенства $\|T^*\|_{x,y} = \|T\|_{y,x}$. $\square$

Упражнение 14. Если H бесконечномерно, то умножение в $(\mathscr{B}(H), wo)$ не является совместно непрерывным.

Теперь, наконец, у нас все готово для построения борелевского исчисления от нормального оператора.

Борелевское исчисление

Пусть H — гильбертово пространство, $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор, $K \subset \mathbb{C}$ — компактное подмножество. Как и раньше, через $t \in B(K)$ обозначим функцию $t(z) = z$ $(z \in K)$.

Определение 13. *Борелевское исчисление* от T на K — это непрерывный унитальный $*$-гомоморфизм $\gamma_b \colon (B(K), wm) \to (\mathscr{B}(H), wo)$, такой, что $\gamma_b(t) = T$.

Вот простейшие свойства борелевского исчисления:

Предложение 3. *Пусть борелевское исчисление от T на K существует. Тогда:*
1) *оно единственно;*
2) *$K \supset \sigma(T)$;*
3) *$\gamma_b|_{C(K)} = \gamma_c$ (т.е. борелевское исчисление продолжает непрерывное);*
4) *$\gamma_b \colon B(K) \to \mathscr{B}(H)$ непрерывно по норме, и $\|\gamma_b\| = 1$.*

Доказательство. 4) Следует из того, что γ_b — $*$-гомоморфизм между C^*-алгебрами (см. предложение 7 из лекции 9).

3) и 2): Следует из 4) и свойств непрерывного исчисления.

1) Следует из 3) и плотности $C(K)$ в $(B(K), wm)$ (см. следствие 1). □

Для доказательства существования борелевского исчисления мы сперва докажем более общее утверждение о продолжении представлений коммутативных C^*-алгебр, а потом применим его к непрерывному исчислению от заданного оператора.

Теорема 4. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\pi \colon C(X) \to \mathscr{B}(H)$ — унитальный $*$-гомоморфизм. Тогда существует единственный непрерывный унитальный $*$-гомоморфизм $\tilde{\pi} \colon (B(X), wm) \to (\mathscr{B}(H), wo)$, продолжающий π:*

$$\begin{tikzcd} C(X) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j_C"'] & \mathscr{B}(H) \\ B(X) \arrow[ur, dashed, "\tilde{\pi}"'] & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные $x, y \in H$ и зададим функционал $F_{x,y}$ на $C(X)$ формулой $F_{x,y}(f) = \langle \pi(f)x, y \rangle$. По теореме Рисса-Маркова-Какутани, существует единственная мера $\mu_{x,y} \in M(X)$, такая, что

$$\langle \pi(f)x, y \rangle = \int_X f \, d\mu_{x,y} \quad \text{для каждой} \quad f \in C(X). \tag{1}$$

При этом $\|\mu_{x,y}\| = \|F_{x,y}\| \leqslant \|\pi\| \|x\| \|y\| = \|x\| \|y\|$ (см. предложение 7 из лекции 9). Кроме того, легко видеть, что

$$\mu_{\alpha x + \beta y, z} = \alpha \mu_{x,z} + \beta \mu_{y,z} \quad \text{и} \quad \mu_{x, \alpha y + \beta z} = \bar{\alpha} \mu_{x,y} + \bar{\beta} \mu_{x,z} \tag{2}$$

для любых $x, y, z \in H$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Теперь воспользуемся тем, что правая часть (1) имеет смысл не только для непрерывной, но и для любой борелевской ограниченной f. А именно, возьмем любую $f \in B(X)$ и положим

$$\varPhi_f(x,y) = \int_X f\,d\mu_{x,y} \qquad (x, y \in H).$$

Из (2) следует, что $\varPhi_f$ — полуторалинейная форма на H. Кроме того, для любых $x, y \in H$ выполнено

$$|\varPhi_f(x,y)| \leqslant \|f\|_\infty \|\mu_{x,y}\| \leqslant \|f\|_\infty \|x\| \|y\|,$$

поэтому $\varPhi$ ограничена. Следовательно, ввиду теоремы 1, существует единственный оператор $\tilde\pi(f) \in \mathscr{B}(H)$ такой, что

$$\langle \tilde\pi(f)x, y\rangle = \varPhi_f(x,y) = \int_X f\,d\mu_{x,y} \qquad (x, y \in H). \tag{3}$$

Правая часть последнего равенства линейно зависит от $f \in B(X)$, поэтому построенное отображение $\tilde\pi \colon B(X) \to \mathscr{B}(H)$ линейно. Далее, из (3) видно, что для любых $x, y \in H$ мы имеем $\|\tilde\pi(f)\|_{x,y} = \|f\|_{\mu_{x,y}}$. Следовательно, $\tilde\pi$ непрерывно относительно слабо-мерной топологии на $B(X)$ и слабо-операторной топологии на $\mathscr{B}(H)$.

Чтобы доказать, что $\tilde\pi$ — $*$-гомоморфизм, воспользуемся следующей леммой:

Лемма 1. *Пусть A, B — инволютивные полинормированные алгебры, $A_0 \subset A$ — плотная подалгебра, $\varphi \colon A \to B$ — непрерывное линейное отображение, ограничение которого на A_0 является $*$-гомоморфизмом. Тогда φ — $*$-гомоморфизм.*

Доказательство. Как обычно, для каждого $a \in A$ обозначим через $L_a, R_a \colon A \to A$ операторы левого (соответственно, правого) умножения на a. Мы знаем, что

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad \text{для любых} \quad a, b \in A_0.$$

Это означает, что

$$(\varphi \circ L_a)|_{A_0} = (L_{\varphi(a)} \circ \varphi)|_{A_0} \quad \text{для любого} \quad a \in A_0.$$

Поскольку оба отображения из последнего равенства непрерывны на A, а A_0 плотно в A, эти отображения должны совпадать всюду на A. Итак,

$$\varphi \circ L_a = L_{\varphi(a)} \circ \varphi \quad \text{для любого} \quad a \in A_0,$$

или, эквивалентно,

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad \text{для любого} \quad a \in A_0 \quad \text{и (уже!) любого} \quad b \in A.$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$(\varphi \circ R_b)|_{A_0} = (R_{\varphi(b)} \circ \varphi)|_{A_0} \quad \text{для любого} \quad b \in A.$$

Как и выше, отсюда следует, что участвующие в последнем равенстве отображения совпадают на всей A, а это и означает, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для любых $a, b \in A$, как и требовалось. Итак, φ — гомоморфизм алгебр. Наконец, отображения $a \mapsto \varphi(a^*)$ и $a \mapsto \varphi(a)^*$ из A в B по условию совпадают на A_0, а, значит (ввиду их непрерывности), и на всей A. Следовательно, φ — $*$-гомоморфизм. $\square$

Применяя только что доказанную лемму к нашей ситуации, мы получаем, что $\tilde{\pi}$ — $*$-гомоморфизм. Его единственность следует из плотности $C(X)$ в $(B(X), wm)$. Тем самым теорема доказана. $\square$

Замечание 5. Чтобы лучше уяснить суть доказательства последней теоремы, полезно взглянуть на следующие картинки:

$$
\begin{tikzcd}
C(X) \arrow[rr, "j_C"] \arrow[dr, "F"'] & & B(X) \arrow[dl, dashed, "\tilde{F}"] \\
& \mathbb{C} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C(X) \arrow[rr, "j_C"] \arrow[dr, "\pi"] \arrow[ddr, "F_{x,y}"'] & & B(X) \arrow[dl, dashed, "\tilde{\pi}"'] \arrow[ddl, "\tilde{F}_{x,y}"] \\
& \mathscr{B}(H) \arrow[d, "\varepsilon_{x,y}"] & \\
& \mathbb{C} &
\end{tikzcd}
$$

Левая картинка показывает, что любой непрерывный функционал F на $C(X)$ продолжается (единственным образом) до wm-непрерывного функционала на $B(X)$. А именно, мы берем меру $\mu \in M(X)$, соответствующую F, и полагаем по определению $\tilde{F}(f) = \int_X f\,d\mu$ для любой $f \in B(X)$. В доказательстве теоремы, проиллюстрированном на правой картинке, аналогичная процедура применяется уже не к функционалам, а к представлениям. В этой картинке через $\varepsilon_{x,y}$ обозначен функционал на $\mathscr{B}(H)$, сопоставляющий оператору $T \in \mathscr{B}(H)$ его «матричный элемент» $\varepsilon_{x,y}(T) = \langle Tx, y\rangle$. Процедура продолжения представления π устроена так: по заданному π строится функционал $F_{x,y} = \varepsilon_{x,y} \circ T$ на $C(X)$, затем он продолжается до функционала $\tilde{F}_{x,y}$ на $B(X)$ (см. левую картинку), а потом все функционалы $\tilde{F}_{x,y}$ «склеиваются» в представление $\tilde{\pi}$ при помощи соответствия между операторами и полуторалинейными формами.

По-другому теорему 4 можно переформулировать так:

Теорема 5. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство. Существуют канонические биекции*

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\text{унитальные} \\
*\text{-гомоморфизмы} \\
C(X) \to \mathscr{B}(H)
\end{array}
\right\}
\rightleftarrows
\left\{
\begin{array}{c}
\text{унитальные непрерывные} \\
*\text{-гомоморфизмы} \\
(B(X), wm) \to (\mathscr{B}(H), wo)
\end{array}
\right\}
$$

Здесь отображение, действующее справа налево, сопоставляет каждому гомоморфизму $\rho\colon B(X) \to \mathscr{B}(H)$ его ограничение на $C(X)$, а отображение, действующее слева направо, сопоставляет каждому $\pi\colon C(X) \to \mathscr{B}(H)$ его каноническое продолжение $\tilde{\pi}$ на $B(X)$.

В качестве следствия мы получаем теорему о существовании борелевского исчисления от нормального оператора.

Теорема 6. *Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор в гильбертовом пространстве H, $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, содержащий $\sigma(T)$. Тогда существует единственное борелевское исчисление $\gamma_b\colon B(K) \to \mathscr{B}(H)$ от T на K.*

Доказательство. Достаточно применить предыдущую теорему, взяв в качестве π непрерывное исчисление $\gamma_c\colon C(K) \to \mathscr{B}(H)$ от T на K. $\square$

С учетом теоремы 5, мы можем переформулировать теорему о борелевском исчислении следующим образом:

Теорема 7. *Пусть H — гильбертово пространство, $K \subset \mathbb{C}$ — непустой компакт. Существуют канонические биекции*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{нормальные} \\ T \in \mathscr{B}(H): \\ \sigma(T) \subset K \end{array} \right\} \quad \rightleftarrows \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{унитальные} \\ *\text{-гомоморфизмы} \\ C(K) \to \mathscr{B}(H) \end{array} \right\} \quad \rightleftarrows \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{унитальные непрерывные} \\ *\text{-гомоморфизмы} \\ (B(K), wm) \to (\mathscr{B}(H), wo) \end{array} \right\}$$

Здесь стрелка, действующая из первого множества во второе, сопоставляет оператору T его непрерывное исчисление на K, а стрелка, действующая из второго множества в первое, сопоставляет гомоморфизму $\pi\colon C(K) \to \mathscr{B}(H)$ оператор $\pi(t)$, где $t(z) = z$ для любого $z \in K$. Стрелки, действующие между вторым и третьим множествами — те же, что и в теореме 5.

Замечание 6. Последняя теорема — это еще одна «вариация на тему» простейшего алгебраического принципа (см. лекцию 1): *линейные операторы — это представления алгебры многочленов* $\mathbb{C}[t]$. С этой точки зрения, «хорошие» линейные операторы — это »хорошие» представления $\mathbb{C}[t]$, которые продолжаются на ту или иную алгебру функций, содержащую $\mathbb{C}[t]$. В частности, ограниченные операторы в банаховом пространстве E — это в точности непрерывные представления в E алгебры целых функций $\mathscr{O}(\mathbb{C})$, а ограниченные операторы в E со спектром в компакте K — это непрерывные представления в E алгебры ростков $\mathscr{O}(K)$ (см. лекцию 6). Что же касается теоремы 7, то она показывает, представлениям каких алгебр отвечают нормальные ограниченные операторы в гильбертовом пространстве.