Спектральная теория и функциональные исчисления
для линейных операторов

Лекция 11.
Борелевское исчисление: примеры и свойства.

Напомним, что на прошлой лекции для произвольного нормального оператора T в гильбертовом пространстве H мы построили борелевское исчисление, т.е. гомоморфизм γ_b из алгебры $B(K)$ ограниченных борелевских функций на компакте $K \subset \mathbb{C}$, содержащем спектр T, в алгебру $\mathscr{B}(H)$, который продолжает непрерывное исчисление и непрерывен относительно слабо-мерной топологии на $B(K)$ и слабо-операторной топологии на $\mathscr{B}(H)$.

Чтобы лучше понять, как устроено борелевское исчисление, попробуйте описать его для «конкретных» операторов:

Упражнение 1. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ — ограниченная измеримая функция. Опишите борелевское исчисление для оператора умножения M_φ, действующего в $L^2(X, \mu)$. При этом обратите внимание на следующие частные случаи:

1) диагональный оператор M_λ в ℓ^2;

2) оператор умножения на «независимую переменную» $M_t \in \mathscr{B}(L^2[a, b])$, действующий по правилу $(M_t f)(x) = x f(x)$.

Упражнение 2*. (Для любителей гармонического анализа). Опишите борелевское исчисление для операторов сдвига в пространствах $\ell^2(\mathbb{Z})$, $L^2(\mathbb{T})$ и $L^2(\mathbb{R})$.
Указание. Сдвиг — это свертка с δ-функцией.

Посмотрим теперь, какими общими свойствами обладает борелевское исчисление. Первое свойство вполне предсказуемо (ср. упр. 2 из лекции 6 и упр. 8 из лекции 9):

Упражнение 3. Пусть $K, L \subset \mathbb{C}$ — компакты, и $\sigma(T) \subset K \subset L$. Обозначим через γ_b^K и γ_b^L борелевские исчисления от T на K и L соответственно, а через $r_{LK}\colon B(L) \to B(K)$ — гомоморфизм ограничения. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} B(L) \arrow[d, "r_{LK}"'] \arrow[dr, "\gamma_b^L"] & \\ B(K) \arrow[r, "\gamma_b^K"'] & \mathscr{B}(H) \end{tikzcd}$$

Поскольку борелевское исчисление продолжает непрерывное и не зависит от выбора компакта, содержащего $\sigma(T)$, мы в дальнейшем будем вместо $\gamma_b(f)$ использовать уже привычное обозначение $f(T)$ (для любой ограниченной борелевской функции f на $\sigma(T)$).

Напомним, что как для голоморфного, так и для непрерывного исчисления справедливы две важные теоремы: теорема об отображении спектра и теорема о композиции (см. лекции 6 и 9). Кроме того, непрерывное исчисление на спектре изометрично (теорема 5 из лекции 9). Естественно поинтересоваться, справедливы ли аналогичные утверждения для борелевского исчисления.

Упражнение 4. 1) Изометрично ли борелевское исчисление $\gamma_b \colon B(\sigma(T)) \to \mathscr{B}(H)$?

2) Верно ли, что $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ для любой $f \in B(\sigma(T))$?

3) Пусть $K \supset \sigma(T)$ — компакт, $f \in B(K)$, $L \supset f(K)$ — другой компакт, и $g \in B(L)$. Верно ли, что $g(f(T)) = (g \circ f)(T)$?

Замечание 1. Левая часть последнего равенства имеет смысл, поскольку $\sigma(f(T)) = \sigma(\gamma_b(f)) \subset \sigma(f) = f(K) \subset L$.

Вот еще одно полезное приложение борелевского исчисления (ср. упр. 11 из лекции 6):

Упражнение 5. Пусть $U \in \mathscr{B}(H)$ — унитарный оператор. Тогда существует самосопряженный $T \in \mathscr{B}(H)$ такой, что $U = \exp(iT)$.

Для обратимых неунитарных операторов аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно:

Упражнение 6*. Существуют гильбертово пространство H и обратимый оператор $U \in \mathscr{B}(H)$, не представимый в виде $\exp(T)$ ни для какого $T \in \mathscr{B}(H)$.
Указание. В качестве H подойдет пространство $L^2(V) \cap \mathscr{O}(V)$ для некоторой классической области $V \subset \mathbb{C}$. (См. также более простое упр. 12 из лекции 6.)

Спектральная теорема

Спектральная теорема — это, в сущности, не одна теорема, а несколько тесно взаимосвязанных утверждений, описывающих строение произвольного нормального оператора в гильбертовом пространстве. Какое именно из этих утверждений следует называть «спектральной теоремой» — дело вкуса[1]. Чтобы лучше понять смысл спектральной теоремы, полезно вначале выяснить, как она выглядит в конечномерном случае.

В курсе линейной алгебры обычно доказывают, что каждая эрмитова матрица диагонализируется в подходящем ортонормированном базисе. На языке операторов это означает, что каждый самосопряженный оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ в конечномерном гильбертовом пространстве H имеет вид

$$T = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k E_k,$$

где E_k — проекторы на попарно ортогональные подпространства. Спектральная теорема является обобщением этого утверждения на бесконечномерный случай. Она утверждает, говоря неформально, что любой самосопряженный (и, более общо, любой нормальный) оператор T в гильбертовом пространстве H можно в некотором смысле «разложить по проекторам». Существенное отличие от конечномерного случая состоит в том, что это разложение уже не является конечной линейной комбинацией проекторов и даже не является суммой ряда. Дело в том, что если какой-то оператор T представим

[1]См. по этому поводу обсуждение в первом томе книги Рида и Саймона «Методы современной математической физики».

в указанном выше виде, то E_k обязан быть проектором на его собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ_k. Но, как мы уже знаем, у T может вообще не быть собственных значений.

Выход из этой ситуации таков. Вспомним доказательство теоремы о борелевском исчислении (см. прошлую лекцию). В доказательстве участвовали некоторые комплексные меры $\mu_{x,y}$, занумерованные парами векторов $x, y \in H$. Напомним (см. формулу (3) из прошлой лекции), что для любой ограниченной борелевской функции f на $\sigma(T)$ оператор $f(T)$ однозначно определяется равенством

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, d\mu_{x,y}(\lambda).$$

В частности, при $f(\lambda) \equiv \lambda$ мы имеем

$$\langle Tx, y\rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda\, d\mu_{x,y}(\lambda).$$

Эта формула наводит на следующую мысль: а нельзя ли сам оператор T представить в виде некоторого (на этот раз — операторнозначного) интеграла

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda\, d(?)(\lambda)$$

(понимаемого в каком-либо разумном смысле, например, как предел интегральных сумм)? Оказывается, можно. В этом как раз и состоит спектральная теорема (точнее, один из ее вариантов). Чтобы придать смысл последней формуле, нужно сперва определить, что там должно стоять вместо вопросительного знака, т.е. по какой мере берется интеграл. Меры, участвующие в формулировке спектральной теоремы, принимают значения в множестве проекторов и называются *спектральными мерами.*

Спектральные меры

Пусть H — гильбертово пространство. Обозначим через $\mathrm{PR}(H)$ множество всех ортопроекторов в H. Очевидно, имеется биекция между $\mathrm{PR}(H)$ и множеством всех замкнутых векторных подпространств в H, сопоставляющая каждому проектору его образ. При этом оказывается, что многие геометрические соотношения между подпространствами можно переписать в виде алгебраических соотношений между проекторами. Вот несколько иллюстраций:

Определение 1. Будем говорить, что проекторы $P, Q \in \mathrm{PR}(H)$ *ортогональны* (и писать $P \perp Q$), если $\operatorname{Im} P \perp \operatorname{Im} Q$.

Упражнение 7. $P \perp Q \iff PQ = 0 \iff QP = 0 \iff P + Q \in \mathrm{PR}(H)$. При этом $\operatorname{Im}(P+Q) = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Im} Q$.

Упражнение 8. Пусть $P, Q \in \mathrm{PR}(H)$. Тогда $PQ \in \mathrm{PR}(H) \iff PQ = QP$. При этом $\operatorname{Im}(PQ) = \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q$.

В дальнейшем нам также понадобится следующее свойство ортогональных проекторов:

Упражнение 9. Пусть $P_1, \ldots, P_n \in \mathrm{PR}(H)$, и $P_i \perp P_j$ при $i \neq j$. Тогда
$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k\Big\| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\lambda_k|$$
для любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Пусть теперь X — множество, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств.

Определение 2. Отображение $E\colon \mathscr{A} \to \mathrm{PR}(H)$ называется *спектральной мерой*, если
1) $E(\varnothing) = 0$;
2) $E(X) = \mathbf{1}_H$;
3) $E(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} E(A_k)$, если $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$;
4) $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ для любых $A, B \in \mathscr{A}$.

Заметим, что из последнего свойства следует, что $E(A) \perp E(B)$ при $A \cap B = \varnothing$.

Упражнение 10. Докажите, что свойство 3) в определении спектральной меры следует из свойства 4).

Упражнение 11. Пусть $\mathscr{A}$ содержит все одноэлементные подмножества X. Опишите все спектральные меры $\mathscr{A} \to \mathrm{PR}(\mathbb{C})$.

Предложение 1. *Пусть $E\colon \mathscr{A} \to \mathrm{PR}(H)$ — спектральная мера. Для любых $x, y \in H$ и любого $A \in \mathscr{A}$ положим $E_{x,y}(A) = \langle E(A)x, y\rangle$. Тогда $E_{x,y} \in \mathcal{M}_{\mathscr{A}}(X)$, и $\|E_{x,y}\| \leqslant \|x\|\|y\|$.*

Доказательство. Очевидно, $E_{x,y}$ — мера на $\mathscr{A}$. Чтобы доказать, что она имеет ограниченную вариацию, возьмем любой конечный набор $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathscr{A}$ попарно не пересекающихся множеств, и для каждого $k = 1, \ldots, n$ подберем $\lambda_k \in \mathbb{C}$ так, чтобы $|\langle E(A_k)x, y\rangle| = \lambda_k \langle E(A_k)x, y\rangle$ и $|\lambda_k| = 1$. С учетом упражнения 9, получаем
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |\langle E(A_k)x, y\rangle| = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle E(A_k)x, y\rangle &= \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(A_k)x, y\Big\rangle \\ &\leqslant \Big\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(A_k)\Big\| \|x\|\|y\| \leqslant \|x\|\|y\|.\end{aligned}$$
Иначе говоря, $E_{x,y}$ имеет ограниченную вариацию, и $|E_{x,y}|(A) \leqslant \|x\|\|y\|$ для любого $A \in \mathscr{A}$. Дальше ясно. □

Пример 1. Пусть $(X, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство с мерой, и пусть $H = L^2(X, \mu)$. Для каждого $A \in \mathscr{A}$ положим $E(A) = M_{\chi_A}$ (оператор умножения на характеристическую функцию множества A). Тогда, очевидно, E — спектральная мера на $\mathscr{A}$. Если мера μ конечна, то функция, тождественно равная 1, лежит в $L^2(X, \mu)$, и $\mu = E_{1,1}$.

Вот чуть более общий пример:

Пример 2. Пусть $\rho\colon B_{\mathscr{A}}(X) \to \mathscr{B}(H)$ — унитальный $*$-гомоморфизм. Тогда
$$E^\rho\colon \mathscr{A} \to \mathrm{PR}(H), \quad E^\rho(A) = \rho(\chi_A)$$
— спектральная мера на $\mathscr{A}$.

Оказывается, других спектральных мер и не бывает:

Теорема 1. *Пусть* $E\colon \mathscr{A} \to \mathrm{PR}(H)$ *— спектральная мера на* σ*-алгебре* $\mathscr{A} \subset 2^X$. *Тогда существует единственный унитальный* $*$*-гомоморфизм* $I_E\colon B_{\mathscr{A}}(X) \to \mathscr{B}(H)$ *такой, что* $I_E(\chi_A) = E(A)$ *для любого* $A \in \mathscr{A}$. *При этом*

$$\langle I_E(f)x, y\rangle = \int_X f\, dE_{x,y} \tag{1}$$

для любой $f \in B_{\mathscr{A}}(X)$ *и любых* $x, y \in H$.

Доказательство. Зафиксируем $f \in B_{\mathscr{A}}(X)$ и для любых $x, y \in H$ положим

$$\Phi_f(x, y) = \int_X f\, dE_{x,y}.$$

Их определения меры $E_{x,y}$ следует, что Φ_f — полуторалинейная форма на H. Кроме того, с учетом предложения 1,

$$|\Phi_f(x, y)| \leqslant \|f\|\|E_{x,y}\| \leqslant \|f\|\|x\|\|y\|,$$

поэтому Φ_f ограничена, и $\|\Phi_f\| \leqslant \|f\|$. Следовательно, существует единственный оператор $I_E(f) \in \mathscr{B}(H)$, удовлетворяющий (1). Легко видеть, что полученное отображение $I_E\colon B_{\mathscr{A}}(X) \to \mathscr{B}(H)$ линейно, и $\|I_E(f)\| = \|\Phi_f\| \leqslant \|f\|$ для любой $f \in B_{\mathscr{A}}(X)$. Из (1) следует также, что $I_E(\chi_A) = E(A)$ для любого $A \in \mathscr{A}$, поэтому

$$I_E(\chi_A\chi_B) = I_E(\chi_{A\cap B}) = E(A \cap B) = E(A)E(B)$$

для любых $A, B \in \mathscr{A}$. Следовательно, ограничение I_E на алгебру $S_{\mathscr{A}}(X)$ простых функций — гомоморфизм. Из непрерывности I_E и плотности $S_{\mathscr{A}}(X)$ в $B_{\mathscr{A}}(X)$ мы заключаем, что $I_E\colon B_{\mathscr{A}}(X) \to \mathscr{B}(H)$ — гомоморфизм. Отсюда же следует утверждение о единственности I_E. Наконец, поскольку $E_{y,x} = \overline{E_{x,y}}$ для любых $x, y \in H$, мы получаем

$$\langle I_E(\bar f)x, y\rangle = \int_X \bar f\, dE_{x,y} = \overline{\int_X f\, dE_{y,x}} = \overline{\langle I_E(f)y, x\rangle} = \langle x, I_E(f)y\rangle = \langle I_E(f)^*x, y\rangle.$$

Следовательно, I_E — $*$-гомоморфизм. Теорема доказана. $\square$

Определение 3. Для любой функции $f \in B_{\mathscr{A}}(X)$ оператор $I_E(f)$ называется *интегралом* f по спектральной мере E и обозначается через

$$\int_X f(\lambda)\, dE(\lambda).$$

Замечание 2. Вы, наверное, заметили, что доказательство последней теоремы похоже на доказательство теоремы о продолжении представлений с $C(X)$ на $B(X)$ (см. прошлую лекцию): в обоих случаях применяется один и тот же прием «склеивания» при помощи полуторалинейных форм.

С учетом примера 2, последнюю теорему можно переформулировать следующим образом:

Теорема 2. *Пусть X — множество, $\mathscr{A} \subset 2^X$ — σ-алгебра его подмножеств. Существуют канонические биекции*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{спектральные меры} \\ \mathscr{A} \to \mathrm{PR}(H) \end{array} \right\} \quad \rightleftarrows \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{унитальные } *\text{-гомоморфизмы} \\ B_{\mathscr{A}}(X) \to \mathscr{B}(H) \end{array} \right\}$$

Здесь отображение, действующее справа налево, сопоставляет каждому гомоморфизму $\rho\colon B_{\mathscr{A}}(X) \to \mathscr{B}(H)$ спектральную меру E^ρ (см. пример 2), а отображение, действующее слева направо, сопоставляет каждой спектральной мере $E\colon \mathscr{A} \to \mathrm{PR}(H)$ гомоморфизм $I_E\colon B_{\mathscr{A}}(X) \to \mathscr{B}(H)$.

Применяя эту теорему к борелевскому исчислению от нормального оператора, получаем следующий результат:

Следствие 1. *Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор, $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, содержащий $\sigma(T)$. Тогда существует спектральная мера $E\colon \mathscr{B}or(K) \to \mathrm{PR}(H)$ такая, что*

$$T = \int_K \lambda \, dE(\lambda). \tag{2}$$

При этом для любой $f \in B(K)$ справедлива формула

$$f(T) = \int_K f(\lambda)\, dE(\lambda). \tag{3}$$

Это следствие можно рассматривать как некий «суррогат» спектральной теоремы. Почему «суррогат»? Дело в том, что спектральная мера, о которой здесь идет речь, определяется соотношением (2) неоднозначно (хотя, конечно, более сильное условие (3) влечет за собой равенство $E(A) = \chi_A(T)$ и полностью определяет меру E). Однако борелевское исчисление — это не просто унитальный $*$-гомоморфизм из $B(X)$ в $\mathscr{B}(H)$, он еще и непрерывен относительно слабо-мерной топологии wm на $B(X)$ и слабо-операторной топологии wo на $\mathscr{B}(H)$. Поэтому, чтобы добиться желаемого взаимно-однозначного соответствия между операторами и спектральными мерами, естественно попытаться выяснить, какие спектральные меры отвечают гомоморфизмам, непрерывным относительно этих «ослабленных» топологий.

Итак, пусть теперь X — компактное хаусдорфово топологическое пространство.

Определение 4. Говорят, что спектральная мера $E\colon \mathscr{B}or(X) \to \mathrm{PR}(H)$ *регулярна*, если для любых $x, y \in H$ комплексная мера $E_{x,y}$ регулярна.

Предложение 2. *Спектральная мера $E\colon \mathscr{B}or(X) \to \mathrm{PR}(H)$ регулярна $\iff$ гомоморфизм $I_E\colon B(X) \to \mathscr{B}(H)$ непрерывен относительно слабо-мерной топологии на $B(X)$ и слабо-операторной топологии на $\mathscr{B}(H)$.*

Доказательство. ($\Longrightarrow$) Если E регулярна, то для любых $x, y \in H$ и любой $f \in B(X)$ выполнено
$$\|I_E(f)\|_{x,y} = |\langle I_E(f)x, y\rangle| = \left| \int_X f\, dE_{x,y} \right| = \|f\|_{E_{x,y}}.$$
Отсюда следует непрерывность I_E относительно указанных топологий.

($\Longleftarrow$) Зафиксируем произвольные $x, y \in H$. Из wm-wo-непрерывности I_E следует, что найдутся $\mu_1, \dots, \mu_n \in M(X)$ и $C > 0$ такие, что
$$\|I_E(f)\|_{x,y} \leqslant C \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \|f\|_{\mu_k} \tag{4}$$
для любой $f \in B(X)$. Положим $\mu = \sum_{k=1}^n |\mu_k|$; тогда $\mu \in M(X)$ и $\mu \geqslant 0$. Подставляя в (4) вместо f функцию χ_B, получаем
$$|E_{x,y}(B)| = |\langle E(B)x, y\rangle| \leqslant C \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\mu_k(B)| \leqslant C\mu(B).$$
Следовательно, для любого разбиения $B = \bigsqcup_{k=1}^m B_k$ мы имеем
$$\sum_{k=1}^m |E_{x,y}(B_k)| \leqslant C \sum_{k=1}^m \mu(B_k) = C\mu(B),$$
поэтому $|E_{x,y}|(B) \leqslant C\mu(B)$ для любого борелевского B. Из этого неравенства и регулярности μ немедленно следует регулярность $E_{x,y}$. $\square$

Подведем итоги.

Теорема 3. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство. Существуют канонические биекции*
$$\left\{ \begin{matrix} \textit{унитальные} \\ *\textit{-гомоморфизмы} \\ C(X) \to \mathscr{B}(H) \end{matrix} \right\} \rightleftarrows \left\{ \begin{matrix} \textit{унитальные непрерывные} \\ *\textit{-гомоморфизмы} \\ (B(X), wm) \to (\mathscr{B}(H), wo) \end{matrix} \right\} \rightleftarrows$$
$$\rightleftarrows \left\{ \begin{matrix} \textit{регулярные} \\ \textit{спектральные меры} \\ \mathscr{B}or(X) \to \mathrm{PR}(H) \end{matrix} \right\}$$
Биекции между первым и вторым множествами описаны в теореме 5 лекции 10, а биекции между вторым и третьим множествами — в теореме 2.

Наконец, объединяя последнюю теорему с теоремой 7 с прошлой лекции, мы получаем следующее:

Теорема 4. *Пусть H — гильбертово пространство, $K \subset \mathbb{C}$ — непустой компакт. Существуют канонические биекции*
$$\left\{ \begin{matrix} \textit{нормальные операторы} \\ T \in \mathscr{B}(H) : \\ \sigma(T) \subset K \end{matrix} \right\} \rightleftarrows \left\{ \begin{matrix} \textit{унитальные} \\ *\textit{-гомоморфизмы} \\ C(K) \to \mathscr{B}(H) \end{matrix} \right\} \rightleftarrows$$
$$\rightleftarrows \left\{ \begin{matrix} \textit{унитальные непрерывные} \\ *\textit{-гомоморфизмы} \\ (B(K), wm) \to (\mathscr{B}(H), wo) \end{matrix} \right\} \rightleftarrows \left\{ \begin{matrix} \textit{регулярные} \\ \textit{спектральные меры} \\ \mathscr{B}or(K) \to \mathrm{PR}(H) \end{matrix} \right\}$$

Вот, наконец, и спектральная теорема в ее традиционной формулировке:

Теорема 5 (спектральная теорема для нормального оператора). *Пусть H — гильбертово пространство, $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор, $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, содержащий $\sigma(T)$. Тогда существует единственная регулярная спектральная мера $E\colon \mathscr{B}or(K) \to \mathrm{PR}(H)$ такая, что*

$$T = \int_K \lambda \, dE(\lambda). \tag{5}$$

При этом для любой $f \in B(K)$ справедлива формула

$$f(T) = \int_K f(\lambda) \, dE(\lambda).$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться биекцией между первым и последним множествами в предыдущей теореме. □

Упражнение 12. В условиях теоремы докажите, что $E(B) = E(B \cap \sigma(T))$ для любого борелевского $B \subset K$ (иначе говоря, мера E «сосредоточена» на $\sigma(T)$).

Определение 5. Спектральная мера E, фигурирующая в формулировке спектральной теоремы, называется *разложением единицы* оператора T, а проекторы $E(B)$ (для всевозможных борелевских подмножеств $B \subset K$) — его *спектральными проекторами*. Формула (5) называется *спектральным разложением* оператора T.

Упражнение 13. Опишите разложение единицы для операторов умножения и сдвига из упражнений 1 и 2*.

В заключение посмотрим, как в терминах разложения единицы можно описать собственные подпространства и точечный спектр нормального оператора.

Предложение 3. *Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор, $E\colon \mathscr{B}or(K) \to \mathrm{PR}(H)$ — его разложение единицы. Тогда*

1) $\mathrm{Ker}(T - \lambda \mathbf{1}) = \mathrm{Im}\, E(\{\lambda\})$ для любого $\lambda \in \sigma(T)$.
2) $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : E(\{\lambda\}) \neq 0\}$.

Доказательство. Очевидно, в алгебре $B(K)$ справедливо равенство $(t - \lambda)\chi_{\{\lambda\}} = 0$ (здесь, как и прежде, через t обозначена функция $t(z) = z$). Применяя борелевское исчисление γ_b, получаем $(T - \lambda \mathbf{1})E(\{\lambda\}) = 0$, т.е. $\mathrm{Im}\, E(\{\lambda\}) \subset \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathbf{1})$. Докажем противоположное включение.

Упражнение 14. Для любого $S \in \mathscr{B}(H)$ справедливо равенство $\mathrm{Ker}\, S = \mathrm{Ker}\, S^* S$. Как следствие, если S нормален, то $\mathrm{Ker}\, S = \mathrm{Ker}\, S^*$.

Из этого упражнения следует, что $\mathrm{Ker}(T - \lambda \mathbf{1}) = \mathrm{Ker}(T^* - \bar{\lambda} \mathbf{1})$. Следовательно, для любого $x \in \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathbf{1})$ и любых $m, n \in \mathbb{Z}_+$ выполнено

$$T^n (T^*)^m x = \lambda^n \bar{\lambda}^m x. \tag{6}$$

Обозначим через $P \subset B(K)$ унитальную подалгебру, порожденную функциями t и $\bar{t}$. Тогда из (6) следует, что $f(T)x = f(\lambda)x$ для любой $f \in P$.

Теперь зафиксируем произвольный $y \in H$. Из свойств борелевского исчисления следует, что отображения

$$f \mapsto \langle f(T)x, y\rangle \quad \text{и} \quad f \mapsto f(\lambda)\langle x, y\rangle$$

являются непрерывными линейными функционалами на полинормированном пространстве $(B(K), wm)$. Как было отмечено выше, они совпадают на подалгебре $P \subset B(K)$. Но P плотна в $(B(K), wm)$ (почему?), так что эти функционалы совпадают на всей $B(K)$. Ввиду произвольности $y \in H$ мы заключаем, что $f(T)x = f(\lambda)x$ для любой $f \in B(K)$ и любого $x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda\mathbf{1})$. Полагая в последней формуле $f = \chi_{\{\lambda\}}$, мы получаем $E(\{\lambda\})x = x$, т.е. $x \in \operatorname{Im} E(\{\lambda\})$. С учетом сказанного выше, это доказывает 1). Утверждение 2) — это прямое следствие 1). $\square$