Спектральная теория и функциональные исчисления
для линейных операторов

Лекция 12.
Спектральная теорема в терминах интеграла Римана-Стилтьеса.

Напомним, что спектральная теорема, доказанная на прошлой лекции, утверждает, что любой нормальный оператор T в гильбертовом пространстве H может быть представлен в виде $T = \int_{\sigma(T)} \lambda\, dE(\lambda)$, где E — некоторая (однозначно определенная) регулярная спектральная мера на $\sigma(T)$, называемая разложением единицы оператора T. При этом борелевское исчисление от T задается формулой $f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, dE(\lambda)$.

Обсудим теперь несколько иной подход к этой теореме, основанный на понятии операторнозначного интеграла Римана-Стилтьеса. Хотя этот подход менее общий, чем предыдущий, и дает менее сильные результаты, у него есть и определенные достоинства — в первую очередь, конструктивность. Кроме того, он технически проще, поскольку не опирается на общую теорию меры.

Напомним вначале классическое определение интеграла Римана-Стилтьеса. Пусть $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — некоторая неубывающая функция. Возьмем какое-либо разбиение

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = b$$

отрезка $[a,b]$, и на каждом отрезке разбиения $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ выберем точку ξ_i. Полученное размеченное разбиение обозначим через $P(\lambda,\xi)$; его диаметром называется число $d = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(\lambda_i - \lambda_{i-1})$. Возьмем функцию $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ и каждому размеченному разбиению $P(\lambda,\xi)$ сопоставим интегральную сумму

$$S(f, P(\lambda,\xi)) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\varphi(\lambda_i) - \varphi(\lambda_{i-1})).$$

По определению, число $I \in \mathbb{C}$ называется *интегралом Римана-Стилтьеса* функции f по отрезку $[a,b]$ относительно φ, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения $P(\lambda,\xi)$ с диаметром меньше δ выполнено неравенство $|S(f, P(\lambda,\xi)) - I| < \varepsilon$. При этом пишут

$$I = \int_a^b f(\lambda)\, d\varphi(\lambda).$$

Если $\varphi(\lambda) \equiv \lambda$, то мы получаем обычное определение интеграла Римана. Как и в случае интеграла Римана, можно показать, что *любая непрерывная на $[a,b]$ функция интегрируема по Риману-Стилтьесу.*

Аналогичное определение можно дать и в том случае, когда φ — неубывающая функция со значениями в $\mathrm{PR}(H)$. Конечно, для того, чтобы слово «неубывающая» имело смысл, надо сперва ввести отношение порядка в $\mathrm{PR}(H)$.

Упражнение 1. Пусть H — гильбертово пространство, $P, Q \in \mathrm{PR}(H)$ — проекторы. Следующие условия эквивалентны:

1) $\mathrm{Im}\, P \subset \mathrm{Im}\, Q$;

2) $PQ = QP = P$;
3) $\langle Px, x\rangle \leqslant \langle Qx, x\rangle$ для любого $x \in H$;
4) $Q - P \in \mathrm{PR}(H)$.

Определение 1. Если $P, Q \in \mathrm{PR}(H)$ удовлетворяют этим условиям, то говорят, что P не превосходит Q, и пишут $P \leqslant Q$.

Упражнение 2. Пусть $E\colon [a,b] \to \mathrm{PR}(H)$, $E(\lambda) = E_\lambda$ — неубывающая функция, такая, что $E_a = 0$, $E_b = \mathbf{1}_H$.

1) Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Дайте определение интеграла Римана-Стилтьеса $\int_a^b f(\lambda)\, dE_\lambda$ как ограниченного оператора в H и докажите, что он существует, если f непрерывна.

2) Положим $T = \int_a^b \lambda\, dE_\lambda$. Тогда $T^* = T$, $\sigma(T) \subset [a,b]$, и для любой $f \in C[a,b]$ выполнено $f(T) = \int_a^b f(\lambda)\, dE_\lambda$.

Таким образом, каждой неубывающей функции $E\colon [a,b] \to \mathrm{PR}(H)$ соответствует самосопряженный оператор $T = \int_a^b \lambda\, dE_\lambda \in \mathscr{B}(H)$. Опишем теперь обратную конструкцию, которая по заданному самосопряженному оператору $T \in \mathscr{B}(H)$ выдает такую функцию E.

Итак, пусть $T = T^* \in \mathscr{B}(H)$. Напомним, что $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ (см. лекцию 9), и возьмем какой-нибудь полуинтервал $(a,b]$, содержащий $\sigma(T)$. Рассмотрим функции

$$t_+(\lambda) = \begin{cases} \lambda, & \lambda \geqslant 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad t_-(\lambda) = \begin{cases} -\lambda, & \lambda \leqslant 0 \\ 0, & \lambda > 0 \end{cases}$$

Для каждого $\lambda \in [a,b]$ положим $H_\lambda = \operatorname{Ker}(t-\lambda)_+(T)$, и обозначим через E_λ ортопроектор на H_λ.

Определение 2. Построенная выше функция $E\colon [a,b] \to \mathrm{PR}(H)$ называется *спектральной функцией* оператора T.

Упражнение 3. Пусть $E'\colon \mathscr{B}or([a,b]) \to \mathrm{PR}(H)$ — разложение единицы T. Тогда $E_\lambda = E'([a,\lambda])$ для любого $\lambda \in [a,b]$.

Замечание 1. Благодаря этому свойству спектральной функции, часто ее саму называют разложением единицы оператора T.

Упражнение 4 (спектральная теорема). Докажите, что
1) $E_{a+\delta} = 0$ для некоторого $\delta > 0$, и $E_b = \mathbf{1}_H$;
2) $E\colon [a,b] \to \mathrm{PR}(H)$, $E(\lambda) = E_\lambda$ — неубывающая функция;
3) для каждого $x \in H$ функция $[a,b] \to H$, $\lambda \mapsto E_\lambda x$ непрерывна справа;
4) $T = \int_a^b \lambda\, dE_\lambda$;
5) функция $E\colon [a,b] \to \mathrm{PR}(H)$ со свойствами 1)–4) единственна;
6) $f(T) = \int_a^b f(\lambda)\, dE_\lambda$ для любой $f \in C[a,b]$.

Указание к 5). Пусть E — какая-то функция со свойствами 1), 2) и 4), и пусть E' — разложение единицы оператора T из 4). Вначале докажите, что $E_\lambda \leqslant E'([a,\lambda]) \leqslant E_\mu$ при $\lambda < \mu$, а затем воспользуйтесь 3).

Упражнение 5. Для любой неубывающей функции $E\colon [a,b] \to \mathrm{PR}(H)$ свойство 3), указанное в предыдущем упражнении, эквивалентно непрерывности справа отображения $E\colon [a,b] \to (\mathrm{PR}(H), wo)$.

Полученные результаты удобно переформулировать следующим образом:

Теорема 1. *Существуют канонические биекции*

$$\left\{ \begin{gathered} \text{самосопряженные} \\ T \in \mathscr{B}(H): \\ \sigma(T) \subset (a,b] \end{gathered} \right\} \rightleftarrows \left\{ \begin{gathered} \text{неубывающие } E\colon [a,b] \to \mathrm{PR}(H): \\ \exists \delta > 0: \ E_{a+\delta} = 0,\ E_b = \mathbf{1}_H, \text{ и} \\ \lambda \mapsto E_\lambda x \text{ непрерывна справа } \forall x \end{gathered} \right\}$$

Здесь стрелка, действующая из первого множества во второе, сопоставляет оператору T его спектральную функцию, а стрелка, действующая из второго множества в первое, сопоставляет функции E оператор $\int_a^b \lambda\, dE_\lambda$.

Следующее упражнение объясняет происхождение термина «непрерывный спектр».

Упражнение 6. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженный оператор, $E\colon [a,b] \to \mathrm{PR}(H)$ — его спектральная функция, $\lambda_0 \in \sigma(T)$. Тогда

$$\lambda_0 \in \sigma_c(T) \quad \iff \quad \text{функция } \lambda \mapsto E_\lambda x \text{ непрерывна в } \lambda_0 \text{ для любого } x \in H.$$

Функциональные модели

Мы уже упоминали, что спектральная теорема представляет собой совокупность близких друг к другу результатов о строении нормальных операторов. Сейчас нам известны два таких результата — теорема о борелевском исчислении и теорема о спектральном разложении. Наша следующая цель — доказать еще одну разновидность спектральной теоремы, утверждающую, что любой нормальный оператор в гильбертовом пространстве унитарно эквивалентен оператору умножения M_φ на измеримую ограниченную функцию, действующему в пространстве $L^2(X,\mu)$. Иными словами, у любого нормального оператора есть *функциональная модель*. Напомним, что пользу от функциональных моделей мы уже почувствовали, исследуя спектры операторов сдвига на группах (см. лекцию 4).

Вначале напомним несколько алгебраических определений. Мы уже много раз убеждались, что говорить об операторах — это все равно, что говорить о представлениях тех или иных функциональных алгебр. Вы, вероятно, знаете, что представления какой-либо алгебры — это примерно то же самое, что модули над этой алгеброй. В дальнейшем язык модулей для нас будет более удобен, чем язык представлений, поэтому напомним вкратце, что это такое.

Пусть A — алгебра (как всегда, над $\mathbb{C}$), M — векторное пространство. Говорят, что на M задана структура *левого A-модуля*, если задано билинейное отображение $A \times M \to M$, $(a,x) \mapsto a \cdot x$ такое, что $(ab)\cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ для всех $a,b \in A$, $x \in M$. Если A унитальна и $1 \cdot x = x$ для всех $x \in M$, то M называется *унитальным*.

Пусть M — левый A-модуль. Для каждого $a \in A$ рассмотрим оператор $L_a\colon M \to M$, $x \mapsto a \cdot x$. Легко видеть, что отображение $A \to \mathscr{L}(M)$, $a \mapsto L_a$ — гомоморфизм алгебр, т.е. представление алгебры A в векторном пространстве M. Обратно, если M — векторное пространство, а $\pi\colon A \to \mathscr{L}(M)$ — представление A в M, то M становится левым A-модулем относительно операции $a \cdot x = \pi(a)x$ ($a \in A,\ x \in M$). Очевидно, эти две конструкции («модуль $\to$ представление» и «представление $\to$ модуль») обратны друг к другу. При этом, если A унитальна, то унитальным модулям соответствуют унитальные представления, и наоборот.

Пусть теперь A — банахова алгебра.

Определение 3. Левый банахов A-модуль — это банахово пространство M, снабженное структурой левого A-модуля так, что отображение $A \times M \to M$, $(a, x) \mapsto a \cdot x$ непрерывно.

Напомним (см. упр. 11 из лекции 1). что непрерывность в этом определении эквивалентна существованию константы $C > 0$, такой, что $\|a \cdot x\| \leqslant C\|a\|\|x\|$ для любых $a \in A,\ x \in M$. Это, в свою очередь, означает, что все операторы $L_a \in \mathscr{L}(M)$ ограничены, и $\|L_a\| \leqslant C\|a\|$ для всех $a \in A$. Таким образом, получаем непрерывный гомоморфизм $A \to \mathscr{B}(M),\ a \mapsto L_a$, т.е. непрерывное представление алгебры A. Обратно, если задано непрерывное представление $\pi\colon A \to \mathscr{B}(M)$ алгебры A в банаховом пространстве M, то M становится левым банаховым A-модулем относительно операции $a \cdot x = \pi(a)x$ ($a \in A,\ x \in M$).

Определение 4. Если M, N — левые банаховы A-модули, то ***морфизмом*** из M в N называется непрерывный оператор $\varphi \in \mathscr{B}(M, N)$ такой, что $\varphi(a \cdot x) = a \cdot \varphi(x)$ для всех $a \in A,\ x \in M$. (Иными словами, морфизм банаховых A-модулей — это их морфизм как A-модулей, который непрерывен.)

Очевидно, левые банаховы A-модули и их морфизмы образуют категорию; она обозначается A-**mod**. Через A-$\mathbf{mod}_1$ обозначается подкатегория в A-**mod**, объекты которой — те же, что в A-**mod**, а морфизмы — только те морфизмы банаховых модулей, норма которых не превосходит 1:

$$\mathbf{h}_{A\text{-}\mathbf{mod}_1}(M, N) = \{\varphi \in \mathbf{h}_{A\text{-}\mathbf{mod}}(M, N) : \|\varphi\| \leqslant 1\}.$$

Изоморфизмы в A-$\mathbf{mod}_1$ — это в точности изометрические изоморфизмы модулей (ср. пример 5 из лекции 8).

Предположим теперь, что A — инволютивная банахова алгебра. В этом случае разумно выделить класс банаховых A-модулей, которые являются гильбертовыми пространствами и должным образом реагируют на инволюцию.

Определение 5. *Левый гильбертов A-модуль* — это гильбертово пространство H со структурой левого A-модуля, превращающей его в банахов A-модуль, такой, что $\langle a \cdot x, y\rangle = \langle x, a^* \cdot y\rangle$ для всех $x, y \in H,\ a \in A$.

Легко видеть, что последнее равенство в этом определении означает в точности, что $A \to \mathscr{B}(H),\ a \mapsto L_a$ — $*$-гомоморфизм. Обратно, если H — гильбертово пространство, то каждый непрерывный $*$-гомоморфизм $A \to \mathscr{B}(H)$ превращает H в левый гильбертов A-модуль.

Замечание 2. Мы используем термин «гильбертов модуль» в том смысле, в каком это обычно принято в теории операторов. Не следует путать это понятие с понятием *гильбертова C^*-модуля*. Грубо говоря, гильбертов C^*-модуль — это банахов модуль M над C^*-алгеброй A, норма которого порождается A-значным скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon M\times M\to A$. Как правило, гильбертов C^*-модуль не является гильбертовым пространством. Гильбертовы C^*-модули играют важную роль в некоммутативной геометрии, но в нашем курсе они нам не встретятся. О них можно почитать в книге В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого «C^*-гильбертовы модули» или Ю. П. Соловьева и Е. В. Троицкого «C^*-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии».

Гильбертовы модули над инволютивной банаховой алгеброй A образуют полную подкатегорию в A-$\mathbf{mod}$, обозначаемую через A-$\mathrm{H}\mathbf{mod}$. Аналогично определяется полная подкатегория A-$\mathrm{H}\mathbf{mod}_1\subset A$-$\mathbf{mod}_1$.

Поскольку нам предстоит иметь дело в основном с унитальными модулями над унитальными алгебрами, мы не будем вводить специальных обозначений для категорий унитальных модулей. В дальнейшем для унитальной A символы A-$\mathbf{mod}$, A-$\mathrm{H}\mathbf{mod}$ и т.д. будут обозначать категории левых *унитальных* банаховых (гильбертовых) A-модулей; к путанице это не приведет.

С точки зрения теории операторов, язык гильбертовых модулей удобен, в частности, по следующей причине. Напомним (см. лекцию 10), что нормальные операторы в гильбертовых пространствах со спектром в заданном компакте $K\subset\mathbb{C}$ — это то же самое, что инволютивные унитальные представления алгебры $C(K)$, т.е. объекты категории $C(K)$-$\mathrm{H}\mathbf{mod}$:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{нормальные операторы } T\\ \text{в гильбертовых}\\ \text{пространствах, такие,}\\ \text{что } \sigma(T)\subset K\end{array}\right\}\quad\rightleftarrows\quad \mathrm{Ob}(C(K)\text{-}\mathrm{H}\mathbf{mod})=\mathrm{Ob}(C(K)\text{-}\mathrm{H}\mathbf{mod}_1)$$

Помимо объектов, в категориях гильбертовых $C(K)$-модулей есть морфизмы и, в частности, изоморфизмы. Оказывается, изоморфизмы гильбертовых $C(K)$-модулей нам уже встречались «под другим соусом»:

Упражнение 7. Пусть $S\in\mathscr{B}(H_1)$ и $T\in\mathscr{B}(H_2)$ — нормальные операторы, $K\subset\mathbb{C}$ — компакт, содержащий их спектры, $U\colon H_1\to H_2$ — ограниченный оператор. Следующие условия эквивалентны:

1) U унитарен и осуществляет унитарную эквивалентность S и T, т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "S"] \arrow[d, "U"'] & H_1 \arrow[d, "U"] \\ H_2 \arrow[r, "T"] & H_2 \end{tikzcd}$$

коммутативна.

2) U — изоморфизм в $C(K)$-$\mathrm{H}\mathbf{mod}_1$.

Таким образом,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{нормальные операторы}\\ S\in\mathscr{B}(H_1)\text{ и }T\in\mathscr{B}(H_2)\\ \text{унитарно эквивалентны}\end{array}} \iff \boxed{H_1\cong H_2 \text{ в } C(K)\text{-H}\mathbf{mod}_1}$$

Посмотрим теперь на некоторые примеры банаховых и гильбертовых модулей.

Пример 1. Если A — (банахова) алгебра, то она очевидным образом является левым (банаховым) A-модулем относительно операции $a\cdot b=ab$.

Пример 2. Для любой алгебры A пространство $A^n = A\oplus\cdots\oplus A$ является левым A-модулем относительно операции $a\cdot(a_1,\ldots,a_n)=(aa_1,\ldots,aa_n)$. Любой A-модуль, изоморфный A^n, называется *свободным конечно порожденным A-модулем.* Если A — банахова алгебра, то A^n — банахов A-модуль относительно нормы $\|(a_1,\ldots,a_n)\|=\sum_{i=1}^n\|a_i\|$ (разумеется, вместо $\sum_i$ можно брать $\max_i$ — получится эквивалентная норма). Отметим, что если X — компактное хаусдорфово топологическое пространство и $A=C(X)$, то A^n изоморфен модулю $C(X,\mathbb{C}^n)$ непрерывных функций на X со значениями в $\mathbb{C}^n$.

Пример 3. (Для любителей топологии). Пусть по-прежнему X — компактное пространство, $\pi\colon E\to X$ — векторное расслоение над X. Пространство его сечений

$$\Gamma(X,E)=\{f\colon X\to E : f \text{ непрерывно и } \pi\circ f=\mathbf{1}_X\}$$

является $C(X)$-модулем относительно поточечных операций. Известная теорема из топологии утверждает, что для любого расслоения E над X найдется расслоение F над X такое, что $E\oplus F$ тривиально, т.е. изоморфно расслоению вида $X\times\mathbb{C}^N$ для некоторого N. Поэтому

$$\Gamma(X,E)\oplus\Gamma(X,F)\cong\Gamma(X,X\times\mathbb{C}^N)\cong C(X,\mathbb{C}^N)\cong C(X)^N.$$

Модуль P над произвольной алгеброй A называется *проективным конечно порожденным* модулем, если он изоморфен прямому слагаемому свободного конечно порожденного A-модуля. Таким образом, $\Gamma(X,E)$ — проективный конечно порожденный $C(X)$-модуль. Знаменитая теорема Серра-Суона утверждает, что любой проективный конечно порожденный $C(X)$-модуль имеет такой вид; более того, *функтор сечений Γ осуществляет эквивалентность категории векторных расслоений над X и категории конечно порожденных проективных $C(X)$-модулей.* Эта теорема несет примерно ту же «идеологическую» нагрузку, что и первая теорема Гельфанда-Наймарка; в свое время (в 60-ых гг. прошлого века) она послужила стимулом для появления новой дисциплины — *алгебраической K-теории.*

Забегая вперед, скажем, что вскоре нам предстоит познакомиться с «измеримыми аналогами» модулей $\Gamma(X,E)$ — модулями «квадратично интегрируемых сечений измеримых полей гильбертовых пространств» или, по-другому, «прямыми интегралами гильбертовых пространств».

Пример 4. Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\mu\in M(X)$ — неотрицательная регулярная борелевская мера. Тогда пространство $L^2(X,\mu)$ является гильбертовым $C(X)$-модулем относительно поточечных операций.

Пример 5. Предыдущий пример можно обобщить следующим образом. Пусть по-прежнему X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $(\mathscr{X}, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $\varphi\colon \mathscr{X} \to X$ — измеримое отображение (относительно $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}or(X)$). Для каждой $f \in C(X)$ и каждой $g \in L^2(\mathscr{X}, \mu)$ определим $f \cdot g \in L^2(\mathscr{X}, \mu)$ формулой $(f \cdot g)(x) = f(\varphi(x))g(x)$. Тогда, как нетрудно проверить (проверьте!), $L^2(\mathscr{X}, \mu)$ становится гильбертовым $C(X)$-модулем. Мы будем обозначать его через $L^2(\mathscr{X}, \mu)_\varphi$.

Наша ближайшая цель — доказать, что других гильбертовых $C(X)$-модулей, кроме описанных в предыдущем примере, не бывает. Вначале мы разберемся с частным случаем — примером 4; оказывается, он также описывает весьма широкий класс гильбертовых $C(X)$-модулей.

Определение 6. Пусть A — банахова алгебра, M — левый банахов A-модуль, $x \in M$. Замкнутый подмодуль

$$Ax = \overline{\{a \cdot x : a \in A\}}$$

называется *циклическим подмодулем*, порожденным элементом x. Если существует такой $x \in M$, что $M = Ax$, то M называется *циклическим модулем*, а x — *циклическим вектором* для M.

Пример 6. Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\mu \in M(X)$ — неотрицательная регулярная борелевская мера. Стандартная теорема из теории меры утверждает, что *канонический образ пространства $C(X)$ плотен в $L^2(X, \mu)$* (см., например, книгу Колмогорова и Фомина, где этот факт доказан в предположении метризуемости X). Поэтому гильбертов $C(X)$-модуль $L^2(X, \mu)$, описанный в примере 4, является циклическим: в качестве циклического вектора подойдет функция $x \equiv 1$.

Упражнение 8. Является ли циклическим гильбертов $C(X)$-модуль $L^2(X, \mu) \oplus L^2(X, \mu)$?

Оказывается, пример 6 описывает все (с точностью до изометрического изоморфизма) циклические гильбертовы $C(X)$-модули. Чтобы доказать это, введем некоторые обозначения.

Итак, пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство и H — гильбертов $C(X)$-модуль. Соответствующее $*$-представление $\pi\colon C(X) \to \mathscr{B}(H)$ канонически продолжается до $*$-представления $\tilde{\pi}\colon B(X) \to \mathscr{B}(H)$, непрерывного относительно слабо-мерной топологии на $B(X)$ и слабо-операторной топологии на $\mathscr{B}(H)$ (см. прошлую лекцию). Разумеется, оно будет непрерывно и по норме (как и любое $*$-представление инволютивной банаховой алгебры; см. предложение 7 из лекции 9). Поэтому H становится гильбертовым $B(X)$-модулем. Обозначим через $E\colon \mathscr{B}or(X) \to \mathrm{PR}(H)$ соответствующую регулярную спектральную меру (см. прошлую лекцию); напомним, что $E(B)x = \chi_B \cdot x$ для любого борелевского подмножества $B \subset X$ и любого $x \in H$. Зафиксируем $x \in H$ и определим меру $\mu_x \in M(X)$ формулой

$$\mu_x(B) = \langle E(B)x, x\rangle \qquad (B \in \mathscr{B}or(X)).$$

Иными словами, μ_x — это в точности мера $E_{x,x}$ из предыдущей лекции. Отметим, что $\mu_x(B) = \|E(B)x\|^2$, так что μ_x неотрицательна. Напомним также, что

$$\langle \tilde{\pi}(f)x, x\rangle = \int_X f\, d\mu_x \qquad (f \in B(X)) \tag{1}$$

(см. теорему 1 и определение 3 из прошлой лекции).

В следующем предложении для любой μ_x-измеримой функции f на X символом $[f]$ мы будем обозначать ее класс эквивалентности относительно μ_x.

Предложение 1. *Существует единственный морфизм гильбертовых $C(X)$-модулей $j_x\colon L^2(X,\mu_x) \to H$ такой, что $j_x([1]) = x$. При этом j_x изометричен, и $\operatorname{Im} j_x = C(X)x$.*

Доказательство. Легко видеть, что каноническое отображение

$$B(X) \to L^2(X,\mu_x), \quad f \mapsto [f]$$

— морфизм банаховых $C(X)$-модулей. Обозначим через $B^2(X,\mu_x) \subset L^2(X,\mu_x)$ его образ. Ясно, что он является плотным подмодулем в $L^2(X,\mu_x)$ (объясните, почему).

Из формулы (1) следует, что

$$\langle \tilde\pi(f)x, \tilde\pi(g)x\rangle = \langle \tilde\pi(f\bar g)x, x\rangle = \int_X f\bar g\, d\mu_x \tag{2}$$

для любых $f,g \in B(X)$. Полагая $f = g$, мы видим, что если $f = 0$ μ_x-п.в., то $\tilde\pi(f)x = 0$. Следовательно, оператор

$$B(X) \to H, \quad f \mapsto \tilde\pi(f)x$$

«пропускается» через $B^2(X,\mu_x)$, т.е. существует единственный линейный оператор $j_x^0\colon B^2(X,\mu_x) \to H$ такой, что $j_x^0([f]) = \tilde\pi(f)x$ для любой $f \in B(X)$. Очевидно, j_x^0 — морфизм $C(X)$-модулей; кроме того, из формулы (2) следует, что он изометричен. Следовательно, j_x^0 продолжается до изометрического морфизма $C(X)$-модулей $j_x\colon L^2(X,\mu_x) \to H$. Поскольку $[1]$ является циклическим вектором для $L^2(X,\mu_x)$, вектор $x = j_x([1])$ — циклический для $\operatorname{Im} j_x$. Отсюда же следует утверждение о единственности j_x. □

В качестве следствия мы получаем теорему о функциональной модели циклического гильбертова $C(X)$-модуля.

Теорема 2. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство и H — циклический гильбертов $C(X)$-модуль. Тогда существует мера $\mu \in M(X)$, $\mu \geqslant 0$ такая, что H изоморфен $L^2(X,\mu)$ в $C(X)$-$\mathrm{H}\mathbf{mod}_1$.*

Перейдем теперь от гильбертовых модулей к нормальным операторам.

Определение 7. Нормальный оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ называется *$*$-циклическим*, если существует $x \in H$ такой, что

$$H = \overline{\operatorname{span}}\{T^n (T^*)^m x : n,m \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Вектор x при этом называется *$*$-циклическим вектором* для T.

Замечание 3. Если в H существует такой оператор, то оно с необходимостью сепарабельно.

Упражнение 9. Нормальный оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ — $*$-циклический $\iff$ H — циклический гильбертов $C(\sigma(T))$-модуль.

С учетом вышеупомянутого соответствия между нормальными операторами и гильбертовыми модулями, мы получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — $*$-циклический нормальный оператор. Тогда существуют мера $\mu \in M(\sigma(T))$, $\mu \geqslant 0$ и унитарный оператор $U \colon H \to L^2(X, \mu)$, осуществляющий унитарную эквивалентность между T и оператором M_t умножения на «независимую переменную»:*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "T"] \arrow[d, "U"'] & H \arrow[d, "U"] \\ L^2(\sigma(T), \mu) \arrow[r, "M_t"] & L^2(\sigma(T), \mu) \end{tikzcd}$$

Здесь оператор M_t действует по формуле $(M_t f)(x) = x f(x)$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 2 и упражнениями 7 и 9. □

Посмотрим на некоторые примеры.

Пример 7. (Ср. пример 6). Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, снабженный обычной мерой Лебега, $M_t \in \mathscr{B}(L^2(K))$ — оператор умножения на «независимую переменную». Тогда M_t — $*$-циклический, а функция $x \equiv 1$ — $*$-циклический вектор для M_t. Соответствующая мера μ_1 совпадает с мерой Лебега.

Пример 8. Оператор двустороннего сдвига $T_b \in \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ — $*$-циклический. Вектор $e_0 \in \ell^2(\mathbb{Z})$ (впрочем, как и любой другой вектор e_n из стандартного базиса $\ell^2(\mathbb{Z})$) — $*$-циклический для T_b.

Упражнение 10. В обозначениях предыдущего примера опишите меру μ_{e_0}.

Упражнение 11. Если нормальный оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ — $*$-циклический, то все его собственные значения однократны. Если H конечномерно, то верно и обратное.

Замечание 4. По этой причине $*$-циклические нормальные операторы иногда называют *операторами с простым спектром* или *операторами со спектром кратности* 1. Вскоре мы обсудим вопрос о кратности спектра в более общей ситуации.

Упражнение 12. При каких условиях диагональный оператор $M_\lambda \in \mathscr{B}(\ell^2)$ является $*$-циклическим?

Упражнение 13. При каких условиях операторы сдвига в $L^2(\mathbb{R})$ и $L^2(\mathbb{T})$ являются $*$-циклическими?