Спектральная теория и функциональные исчисления
для линейных операторов

Лекция 13.
Функциональная модель нормального оператора.

На прошлой лекции мы познакомились с понятием гильбертова модуля и выяснили, что нормальные операторы со спектром в заданном компакте $K \subset \mathbb{C}$ — это то же самое, что гильбертовы $C(K)$-модули. При этом два таких оператора унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие гильбертовы модули изометрически изоморфны. Эта точка зрения удобна по нескольким причинам. В частности, в ряде случаев совершенно не обязательно требовать, чтобы компакт K лежал в $\mathbb{C}$; можно взять произвольное компактное топологическое пространство X и изучать гильбертовы $C(X)$-модули. На прошлой лекции мы описали все *циклические* гильбертовы $C(X)$-модули; оказалось, что любой такой модуль изометрически изоморфен модулю вида $L^2(X, \mu)$, где μ — некоторая неотрицательная регулярная борелевская мера на X. Как следствие, на спектре каждого нормального $*$-циклического оператора T можно ввести меру μ так, что T будет унитарно эквивалентен оператору умножения M_t, действующему в $L^2(\sigma(T), \mu)$ по формуле $(M_t f)(x) = xf(x)$. Это и есть функциональная модель $*$-циклического нормального оператора.

Наша очередная цель — построить функциональную модель для произвольного нормального оператора T, т.е. доказать, что T унитарно эквивалентен оператору умножения M_φ, действующему в пространстве вида $L^2(\mathscr{X}, \mu)$ по формуле $(M_\varphi f)(x) = \varphi(x)f(x)$; здесь $(\mathscr{X}, \mu)$ — некоторое пространство с мерой, а φ — ограниченная измеримая функция на $\mathscr{X}$. Основная идея построения будет такова: мы вначале разложим наш оператор (или гильбертов модуль) в сумму циклических, а затем «склеим» их функциональные модели в одну.

Отступление. Такой процесс построения функциональной модели — это применение следующего общего принципа: чтобы получше изучить какой-либо математический объект, надо разбить его на «элементарные кирпичики». Вот несколько других классических примеров такого рода: теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (любая такая группа — прямая сумма циклических), теорема о жордановой нормальной форме (любая матрица — прямая сумма жордановых клеток), теорема о представлениях конечных групп (любое представление — прямая сумма неприводимых)... (Можете продолжить этот список своими любимыми примерами). Во всех перечисленных примерах речь идет о разложении того или иного модуля в прямую сумму подмодулей: в первом случае — над кольцом $\mathbb{Z}$, во втором — над $\mathbb{C}[t]$, в третьем — над групповой алгеброй $\mathbb{C}G$. В первых двух случаях подмодули циклические, а в третьем (благодаря некоторым хорошим свойствам алгебры $\mathbb{C}G$) их удается выбрать даже неприводимыми. С гильбертовыми модулями ситуация такова: любой гильбертов $C(X)$-модуль разлагается в прямую сумму циклических (но не неприводимых!) подмодулей. Для разложения на неприводимые подмодули нам в дальнейшем (через одну-две лекции) придется использовать уже не прямые суммы, а так называемые прямые интегралы.

Гильбертовы прямые суммы

Замечание 1. Ниже нам придется иметь дело с рядами вида $\sum_{i\in I} x_i$, где I — множество произвольной мощности и $x_i \in \mathbb{C}$. Сделаем в связи с этим несколько замечаний. Мы будем говорить, что такой ряд абсолютно сходится, если множество $J = \{i \in I : x_i \neq 0\}$ не более чем счетно, и ряд $\sum_{i\in J} |x_i|$ сходится при какой-либо ($\iff$ при любой) нумерации множества J. При этом мы полагаем по определению $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in J} x_i$; эта сумма также не зависит от нумерации J.

Пусть $\{H_i\}_{i\in I}$ — некоторое семейство гильбертовых пространств.

Определение 1. *Гильбертова прямая сумма* семейства $\{H_i\}_{i\in I}$ определяется следующим образом:

$$\dot{\bigoplus_{i\in I}} H_i = \Big\{ x = (x_i) \in \prod_{i\in I} H_i : \sum_{i\in I} \|x_i\|^2 < \infty \Big\}.$$

Упражнение 1. Гильбертова прямая сумма $H = \dot{\bigoplus}_{i\in I} H_i$ является векторным подпространством в $\prod_{i\in I} H_i$. Для любых $x, y \in H$ ряд $\sum_{i\in I} \langle x_i, y_i \rangle$ абсолютно сходится, и формула $\langle x, y \rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i \rangle$ задает скалярное произведение в H, относительно которого H является гильбертовым пространством.

Замечание 2. Для каждого $i \in I$ пространство H_i очевидным образом вкладывается в H в качестве замкнутого подпространства. В дальнейшем мы будем отождествлять H_i с его образом в H и считать, что $H_i \subset H$.

Пример 1. Если $I = \mathbb{N}$ и $H_i = \mathbb{C}$ для всех $i \in I$, то $\dot{\bigoplus}_{i\in I} H_i = \ell^2$. Для произвольного I мы получаем пространство, которое по понятной причине обозначается через $\ell^2(I)$.

Теперь перейдем от пространств к операторам.

Упражнение 2. Пусть для каждого $i \in I$ задан ограниченный оператор $T_i \in \mathscr{B}(H_i)$, причем $\sup_i \|T_i\| < \infty$. Тогда формула $T(x) = (T_i x_i)_{i\in I}$ (где $x = (x_i)_{i\in I} \in \dot{\bigoplus}_{i\in I} H_i$) задает ограниченный оператор T в $\dot{\bigoplus}_{i\in I} H_i$. При этом $\|T\| = \sup_i \|T_i\|$.

Определение 2. Оператор T, определенный в предыдущем упражнении, называется *гильбертовой прямой суммой* семейства операторов $\{T_i\}_{i\in I}$ и обозначается через $\dot{\bigoplus}_{i\in I} T_i$.

Пример 2. Если $I = \mathbb{N}$ и $H_i = \mathbb{C}$ для всех $i \in I$, то $\dot{\bigoplus}_{i\in I} T_i$ — это просто диагональный оператор M_λ в ℓ^2.

Прежде чем определять гильбертовы прямые суммы гильбертовых модулей, докажем простую лемму.

Лемма 1. *Пусть A — унитальная инволютивная банахова алгебра, H — левый унитальный гильбертов A-модуль. Тогда $\|a \cdot x\| \leqslant \|a\| \|x\|$ для любых $a \in A$, $x \in H$.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться тем фактом, что представление унитальной инволютивной банаховой алгебры не увеличивает норму (см. предложение 7 из лекции 9). □

Объединяя эту лемму с упражнением 2, получаем следующее

Предложение 1. *Пусть A — унитальная инволютивная банахова алгебра, $\{H_i\}_{i\in I}$ — семейство левых унитальных гильбертовых A-модулей. Тогда $\dot{\bigoplus}_{i\in I} H_i$ является левым унитальным гильбертовым A-модулем относительно операции $a\cdot(x_i)_{i\in I} = (a\cdot x_i)_{i\in I}$.*

В случае, когда все H_i-ые лежат в одном общем H, операция гильбертовой прямой суммы сводится к взятию замкнутой линейной оболочки:

Упражнение 3. Пусть A — унитальная инволютивная банахова алгебра, H — левый унитальный гильбертов A-модуль, $\{H_i\}_{i\in I}$ — семейство попарно ортогональных замкнутых подмодулей в H. Тогда существует единственный морфизм $U\colon \dot{\bigoplus}_{i\in I} H_i \to H$ в A-H**mod** такой, что $Ux = x$ для любого $x \in H_i$ и любого $i \in I$. При этом U изометричен, и $\operatorname{Im} U = \overline{\sum_{i\in I} H_i}$ (замыкание алгебраической суммы).

Приступим теперь к разложению гильбертова модуля в сумму циклических. Ключевую роль здесь играет следующая простая лемма:

Лемма 2. *Пусть A — инволютивная банахова алгебра, H — левый гильбертов A-модуль, $H_0 \subset H$ — замкнутый подмодуль. Тогда и $H_0^\perp$ — подмодуль.*

Доказательство. Если $x \in H_0^\perp$ и $a \in A$, то для любого $y \in H_0$ мы имеем $\langle a\cdot x, y\rangle = \langle x, a^*\cdot y\rangle = 0$. Следовательно, $a\cdot x \in H_0^\perp$. □

Предложение 2. *Пусть A — унитальная инволютивная банахова алгебра, H — левый унитальный гильбертов A-модуль. Тогда существует семейство $\{H_i\}_{i\in I}$ замкнутых попарно ортогональных циклических подмодулей в H, такое, что $H = \overline{\sum_{i\in I} H_i}$. Как следствие, H изоморфен $\dot{\bigoplus}_{i\in I} H_i$ в A-H**mod**$_1$.*

Доказательство. Пусть M — множество, состоящее из всевозможных наборов ненулевых попарно ортогональных замкнутых циклических подмодулей в H. Это множество частично упорядочено по включению. Легко видеть, что M удовлетворяет условиям леммы Цорна. Действительно, если $C \subset M$ линейно упорядочено, то набор $\alpha = \bigcup\{\beta : \beta \in C\}$ является элементом M и не меньше любого элемента из C. Следовательно, в M есть максимальный элемент $\gamma = \{H_i\}_{i\in I}$. Положим $H_0 = \overline{\sum_{i\in I} H_i}$ и покажем, что $H_0 = H$. Если это не так, то $H_0^\perp \ne 0$, и $H_0^\perp$ — подмодуль в H по предыдущей лемме. Выберем произвольный ненулевой $x \in H_0^\perp$; тогда $Ax \subset H_0^\perp$ — ненулевой замкнутый циклический подмодуль, ортогональный всем H_i-ым. Это противоречит максимальности набора γ. Следовательно, $H_0 = H$, как и требовалось. □

Вместе с теоремой 2 из прошлой лекции это приводит к следующему результату:

Теорема 1. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, H — левый унитальный гильбертов $C(X)$-модуль. Тогда существует семейство $\{\mu_i\}_{i\in I}$ неотрицательных регулярных борелевских мер на X такое, что H изоморфен $\dot{\bigoplus}_{i\in I} L^2(X,\mu_i)$ в $C(X)$-H**mod**.*

В качестве следствия мы получаем соответствующий результат об операторах:

Теорема 2. *Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор. Тогда существует семейство $\{\mu_i\}_{i\in I}$ неотрицательных регулярных борелевских мер на $\sigma(T)$ такое, что T унитарно эквивалентен оператору $\dot{\bigoplus}_{i\in I} M_t^{\mu_i}$, где для каждого $i \in I$ оператор $M_t^{\mu_i}$ действует в $L^2(\sigma(T), \mu_i)$ по формуле $(M_t^{\mu_i} f)(z) = zf(z)$.*

Доказательство. Достаточно превратить H в гильбертов $C(\sigma(T))$-модуль (см. прошлую лекцию) и применить предыдущую теорему. □

Теорема 2 дает важную информацию о строении нормального оператора. Однако у нее есть один существенный недостаток: разложение T в сумму операторов умножения $M_t^{\mu_i}$, вообще говоря, неединственно. В частности, один «элементарный кирпичик» $M_t^{\mu_i}$ вполне может оказаться суммой двух других:

Упражнение 4. Постройте ненулевые регулярные борелевские меры μ, ν_1, ν_2 на каком-нибудь компакте $K \subset \mathbb{C}$ так, чтобы оператор $M_t^{\mu} \in \mathscr{B}(L^2(K), \mu)$ был унитарно эквивалентен оператору $M_t^{\nu_1} \dot{\oplus} M_t^{\nu_2}$.

Замечание 3. Впоследствии мы увидим, что разложение, указанное в теореме 2, все же единственно, если слагаемые должным образом сгруппировать и упорядочить.

Обсудим теперь одну общую алгебраическую конструкцию. Пусть A и B — банаховы алгебры, $\psi \colon A \to B$ — непрерывный гомоморфизм. Каждый левый банахов B-модуль M можно тогда рассматривать и как левый банахов A-модуль, полагая $a \cdot x = \psi(a) \cdot x$ для $a \in A$, $x \in M$. Если $u \colon M \to N$ — морфизм в B-**mod**, то он же будет морфизмом и в A-**mod** относительно только что введенного действия A на M и N. Тем самым определен ковариантный функтор $\psi^\# \colon B\text{-}\mathbf{mod} \to A\text{-}\mathbf{mod}$. Он называется *функтором отступления* вдоль ψ или *функтором прямого образа.*

Название «функтор прямого образа» может показаться несколько неожиданным — ведь ψ действует из A в B, а $\psi^\#$ — из B-**mod** в A-**mod**. Эта терминология оправдывается тем, что при переходе от пространств к алгебрам функций на них стрелки обращаются (т.е. функтор «пространство $\mapsto$ алгебра функций» контравариантен; см. лекцию 8). Вот типичный для дальнейшего пример.

Пример 3. Пусть $(\mathscr{X}, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство с мерой, X — компактное топологическое пространство, $\varphi \colon \mathscr{X} \to X$ — измеримое отображение (относительно $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}or(X)$). Определим гомоморфизм $\varphi^\bullet \colon C(X) \to L^\infty(\mathscr{X}, \mu)$ формулой $\varphi^\bullet(f) = f \circ \varphi$. Он, в свою очередь, задает функтор $(\varphi^\bullet)^\# \colon L^\infty(\mathscr{X}, \mu)\text{-}\mathbf{mod} \to C(X)\text{-}\mathbf{mod}$. Если применить этот функтор к $L^2(\mathscr{X}, \mu)$ (которое очевидным образом наделяется структурой модуля над $L^\infty(\mathscr{X}, \mu)$), мы получим $C(X)$-модуль $L^2(\mathscr{X}, \mu)_\varphi$ (см. пример 5 из прошлой лекции).

Теорема 3 (о функциональной модели). *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, H — левый гильбертов $C(X)$-модуль. Тогда существуют пространство с мерой $(\mathscr{X}, \mathscr{A}, \mu)$ и измеримое отображение $\varphi \colon \mathscr{X} \to X$ такие, что H изоморфен $L^2(\mathscr{X}, \mu)_\varphi$ в $C(X)$-H$\mathbf{mod}_1$.*

Доказательство. Представим H в виде, указанном в теореме 1, и рассмотрим дизъюнктное объединение $\mathscr{X} = \bigsqcup_{i\in I} X_i$, где $X_i = X$ для всех $i \in I$. Определим σ-алгебру $\mathscr{A} \subset 2^{\mathscr{X}}$ и меру $\mu \colon \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ следующим образом:

$$\mathscr{A} = \Big\{ \bigsqcup_{i\in I} B_i : B_i \in \mathscr{B}or(X_i) \Big\}, \qquad \mu\Big(\bigsqcup_{i\in I} B_i\Big) = \begin{cases} \sum_{i\in I} \mu_i(B_i), & \text{если этот ряд сходится} \\ +\infty & \text{иначе} \end{cases}$$

Наконец, определим измеримое отображение $\varphi\colon \mathscr{X} \to X$, полагая $\varphi(x) = x$ для любого $x \in X_i$ и любого $i \in I$.

Чтобы построить изоморфизм между H и $L^2(\mathscr{X}, \mu)_\varphi$, для каждого $i \in I$ рассмотрим замкнутый подмодуль

$$H_i = \{f \in L^2(\mathscr{X}, \mu)_\varphi : f = 0 \ \text{ п.в. вне } X_i\}.$$

Ясно, что $H_i \perp H_j$ при $i \neq j$. Кроме того, отображение $U_i\colon L^2(X, \mu_i) \to H_i$, сопоставляющее каждой $f \in L^2(X, \mu_i)$ ее продолжение нулем вне X_i, является, очевидно, изоморфизмом в $C(X)$-$\mathrm{H}\mathbf{mod}_1$. С учетом упражнения 3, мы получаем изометрический морфизм $U\colon \dot{\bigoplus}_{i\in I} L^2(X, \mu_i) \to L^2(\mathscr{X}, \mu)_\varphi$, ограничение которого на каждое $L^2(X, \mu_i)$ совпадает с U_i, а образ есть $\overline{\sum_{i\in I} H_i}$. Осталось заметить, что U сюръективен. В самом деле, если $f \in L^2(\mathscr{X}, \mu)$ и $f \perp H_i$, то $f = 0$ п.в. на X_i. Если же это так для всех $i \in I$, то $f = 0$ п.в. на $\mathscr{X}$. Следовательно, $(\operatorname{Im} U)^\perp = 0$, и U — изометрический изоморфизм. $\square$

На языке операторов последняя теорема звучит так:

Теорема 4 (о функциональной модели). *Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор. Тогда существуют пространство с мерой $(\mathscr{X}, \mathscr{A}, \mu)$ и измеримая ограниченная функция $\varphi\colon \mathscr{X} \to \mathbb{C}$ такие, что T унитарно эквивалентен оператору умножения $M_\varphi \in \mathscr{B}(L^2(\mathscr{X}, \mu))$, действующему по формуле $(M_\varphi f)(x) = \varphi(x) f(x)$.*

Упражнение 5. Если H сепарабельно, а T самосопряжен, то в качестве $\mathscr{X}$ можно взять $\mathbb{R}$, а меру μ выбрать конечной.

Теорема о функциональной модели — чрезвычайно мощное средство, позволяющее «задаром» получать содержательную информацию о нормальных операторах. Например, чтобы определить борелевское исчисление от нормального оператора T, достаточно представить T в виде $U^{-1} M_\varphi U$ (где U — оператор, осуществляющий эквивалентность между T и M_φ), и положить $f(T) = U^{-1} M_{f\circ\varphi} U$. Точно так же можно построить разложение единицы T (см. упр. 1 и 13 из лекции 11).

Вот еще одно приложение.

Упражнение 6. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный необратимый оператор.

1) Докажите, что $\operatorname{Im} T$ замкнут $\iff$ 0 — изолированная точка $\sigma(T)$.

2) Верно ли предыдущее утверждение для ненормальных операторов? Верна ли хотя бы одна из импликаций "$\Longrightarrow$" или "$\Longleftarrow$"?

L^∞-функциональное исчисление. Скалярная спектральная мера.

Вернемся теперь к нашему основному вопросу о функциональных исчислениях. Мы уже убедились на многочисленных примерах, что чем больше запас функций, которые можно применять к линейному оператору, тем больше можно сказать о его строении. Как мы уже знаем, от нормального оператора в гильбертовом пространстве можно брать любые ограниченные борелевские функции, определенные на его спектре (см. лекцию 10). По сути дела, именно этот факт и позволил нам доказать спектральную теорему в ее различных формулировках. Естественно теперь поинтересоваться, можно ли от нормального оператора брать *неограниченные* борелевские функции. Оказывается, действительно можно, но если мы при этом хотим оставаться в рамках теории ограниченных операторов, то наши функции должны быть *существенно ограниченными* по отношению к некоторой специальной мере. Наша ближайшая цель — определить эту меру и построить соответствующее L^∞-функциональное исчисление.

Пусть $(X, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство с мерой. Напомним, что существует изометрический изоморфизм

$$L^\infty(X,\mu) \to (L^1(X,\mu))^*, \quad f \mapsto F_f,$$
$$\text{где} \quad F_f(g) = \int_X fg\, d\mu \quad \forall g \in L^1(X,\mu).$$

Как следствие, на $L^\infty(X,\mu)$ возникает слабая* топология $\sigma(L^\infty, L^1)$ (см. лекцию 7).

Упражнение 7. Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\mu \in M(X)$ — неотрицательная регулярная борелевская мера.

1) Покажите, что образ канонического гомоморфизма $C(X) \to L^\infty(X,\mu)$, переводящего каждую функцию в ее класс эквивалентности относительно μ, плотен в слабой* топологии.

2) Покажите, что канонический гомоморфизм $B(X) \to L^\infty(X,\mu)$ непрерывен относительно слабо-мерной топологии на $B(X)$ и слабой* топологии на $L^\infty(X,\mu)$.

Пусть теперь $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор, $K \subset \mathbb{C}$ — компактное подмножество, $\mu \in M(K)$ — неотрицательная регулярная борелевская мера. Как обычно, через $t \in L^\infty(K,\mu)$ мы обозначаем функцию $t(z) = z$ $(z \in K)$ — точнее, ее класс эквивалентности.

Определение 3. *L^∞-функциональным исчислением* от T на (K,μ) называется унитальный $*$-гомоморфизм $\gamma_\infty \colon L^\infty(K,\mu) \to \mathscr{B}(H)$, непрерывный относительно слабой* топологии на $L^\infty(K,\mu)$ и слабо-операторной топологии на $\mathscr{B}(H)$ и такой, что $\gamma_\infty(t) = T$.

Упражнение 8. Предположим, что L^∞-функциональное исчисление от T на (K,μ) существует. Тогда:

1) оно единственно;

2) $\sigma(T) \subset K$;

3) диаграмма

$$\begin{tikzcd} B(K) \arrow[r, "\gamma_b"] \arrow[d] & \mathscr{B}(H) \\ L^\infty(K,\mu) \arrow[ur, "\gamma_\infty"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна. (Здесь γ_b — борелевское исчисление от T, а вертикальная стрелка — канонический гомоморфизм; см. упр. 7).

Если про меру μ ничего не известно, то соответствующего L^∞-функционального исчисления может и не существовать (приведите пример!). Наша задача будет состоять в том, чтобы по заданному оператору T построить некоторую специальную меру

μ на $\sigma(T)$, для которой L^∞-функциональное исчисление от T существует. Она называется *скалярной спектральной мерой* оператора T. Строить ее мы будем в более общем контексте гильбертовых модулей.

Итак, пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, H — унитальный гильбертов $C(X)$-модуль, $\pi\colon C(X) \to \mathscr{B}(H)$ и $\tilde{\pi}\colon B(X) \to \mathscr{B}(H)$ — соответствующие представления, $E\colon \mathscr{B}or(X) \to \mathrm{PR}(H)$ — соответствующая спектральная мера (см. теорему 3 из лекции 11).

Определение 4. Неотрицательная мера $\mu \in M(X)$ называется *скалярной спектральной мерой* для H, если для $B \in \mathscr{B}or(X)$ условия $E(B) = 0$ и $\mu(B) = 0$ эквивалентны.

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые факты из теории меры.

Отступление: напоминания из теории меры.

Пусть X — множество, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств.

Определение 5. Пусть μ, ν — σ-аддитивные комплексные меры на $\mathscr{A}$, $\nu \geqslant 0$.

1) Говорят, что μ *абсолютно непрерывна относительно* ν, если из $\nu(A) = 0,\ A \in \mathscr{A}$ следует, что $\mu(A) = 0$. При этом пишут $\mu \ll \nu$.

2) Если $\mu \geqslant 0$, то говорят, что μ и ν *эквивалентны* (и пишут $\mu \sim \nu$), если одновременно $\mu \ll \nu$ и $\nu \ll \mu$, т.е. если для $A \in \mathscr{A}$ условия $\nu(A) = 0$ и $\mu(A) = 0$ эквивалентны.

Теорема 5 (Радон, Никодим). *Пусть μ, ν — σ-аддитивные комплексные меры на σ-алгебре $\mathscr{A}$, причем $\nu \geqslant 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *$\mu \ll \nu$;*

(ii) *существует ν-интегрируемая функция $\rho\colon X \to \mathbb{C}$ такая, что $\mu(A) = \int_A \rho\, d\nu$ для любого $A \in \mathscr{A}$ (т.е., в обозначениях лекции 10, $\mu = \rho \cdot \nu$);*

(iii) *для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого $A \in \mathscr{A}$, удовлетворяющего условию $\nu(A) < \delta$, выполнено $|\mu|(A) < \varepsilon$.*

При этом, если $\mu \geqslant 0$, то и $\rho \geqslant 0$ ν-п.в. Класс эквивалентности функции ρ (относительно ν) определен однозначно. Функция ρ обозначается $\frac{d\mu}{d\nu}$ и называется производной Радона-Никодима *μ по ν (или* плотностью *μ относительно ν).*

Замечание 4. На самом деле, теорема Радона-Никодима — это импликация (i)$\Rightarrow$(ii) в предыдущем утверждении. Импликация (ii)$\Rightarrow$(iii) — это так называемое *свойство абсолютной непрерывности интеграла*, а импликация (iii)$\Rightarrow$(i) очевидна.

* * *

Вернемся к гильбертовым модулям. Прежде чем строить скалярную спектральную меру, заметим, что если она существует, то она определена однозначно с точностью до эквивалентности.

Для построения скалярной спектральной меры нам будет удобно воспользоваться следующим общим понятием.

Определение 6. Вектор $x \in H$ называется *отделяющим* для представления $\tilde{\pi}$, если для $f \in B(X)$ из $\tilde{\pi}(f)x = 0$ следует, что $\tilde{\pi}(f) = 0$.

Предложение 3. *Если вектор $x \in H$ — отделяющий, то мера μ_x (см. лекцию 12) является скалярной спектральной мерой для H.*

Доказательство. Напомним, что $\mu_x(B) = \|E(B)x\|^2$ для любого борелевского $B \subset X$. Поэтому $\mu_x(B) = 0 \iff E(B)x = 0 \iff E(B) = 0$. $\square$

Упражнение 9. Докажите, что верно и обратное утверждение.

Итак, вопрос о существовании скалярной спектральной меры свелся к вопросу о существовании отделяющего вектора.

Предложение 4. *Если H сепарабелен, то в нем существует отделяющий вектор. Как следствие, существует скалярная спектральная мера для H.*

Доказательство. Представим H в виде $H = \overline{\sum_{i \in I} H_i}$, где H_i — попарно ортогональные циклические подмодули в H (см. предложение 2). Из сепарабельности H следует, что I не более чем счетно, поэтому мы можем считать, что $I = \mathbb{N}$ или $I = \{1, \dots, n\}$. Для каждого $i \in I$ выберем циклический вектор $x_i \in H_i$, $\|x_i\| = 1$, и положим $x = \sum_i \frac{x_i}{2^i}$. Легко видеть, что x — отделяющий вектор. Действительно, если $\tilde{\pi}(f)x = 0$ для некоторой $f \in B(X)$, то из ортогональности H_i-ых следует, что $\tilde{\pi}(f)x_i = 0$ для всех $i \in I$. Поскольку x_i — циклический вектор для H_i, отсюда следует, что $\tilde{\pi}(f)|_{H_i} = 0$ для всех $i \in I$, т.е. $\tilde{\pi}(f) = 0$. Следовательно, x — отделяющий вектор. $\square$

Естественно спросить: а существуют ли какие-нибудь другие скалярные спектральные меры для H, кроме тех, которые указаны в предложении 3? Проще всего ответить на этот вопрос в случае сепарабельного H:

Упражнение 10. Предположим, что в H существует отделяющий вектор x (это заведомо так, если H сепарабельно).

1) Если $\nu \in M(X)$, $\nu \geqslant 0$ и $\nu \ll \mu_x$, то $\nu = \mu_y$ для некоторого $y \in H$.

2) Любая скалярная спектральная мера для H имеет вид μ_y для некоторого (возможно, другого) отделяющего вектора $y \in H$.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Радона-Никодима.

На самом деле, в условии предыдущего упражнения можно и не требовать наличия отделяющего вектора:

Упражнение 11*. Следующие условия эквивалентны:

1) в H существует отделяющий вектор;

2) существует скалярная спектральная мера для H.

При этом любая скалярная спектральная мера для H имеет вид μ_y для некоторого отделяющего вектора $y \in H$.

Указание. Ключевой момент — следующее утверждение из теории меры: если некая мера μ эквивалентна семейству мер $\{\mu_i : i \in I\}$ в том смысле, что $\mu(B) = 0 \iff \mu_i(B) = 0 \; \forall i \in I$, то она эквивалентна не более чем счетному его подсемейству.

Так или иначе, но в общем случае (т.е. для несепарабельного H) предложение 4 перестает быть верным:

Упражнение 12. Постройте нормальный оператор в несепарабельном гильбертовом пространстве, не обладающий скалярной спектральной мерой.

Указание. Если σ-аддитивная мера $\mu \geqslant 0$ такова, что $\mu(\{x\}) > 0$ для любого $x \in X$, то $\mu(X \setminus S) = 0$ для некоторого не более чем счетного подмножества $S \subset X$.

Перейдем теперь к построению L^∞-функционального исчисления.

Предложение 5. *Пусть μ — скалярная спектральная мера для H. Тогда*

$$\operatorname{Ker}\tilde{\pi} = \{f \in B(X) : f = 0 \ \mu_x\text{-п.в. } \forall x \in H\} = \{f \in B(X) : f = 0 \ \mu\text{-п.в.}\}.$$

Доказательство. Для любого борелевского $B \subset X$ имеем

$$\mu(B) = 0 \iff E(B) = 0 \iff \|E(B)x\|^2 = 0 \ \forall x \in H \iff \mu_x(B) = 0 \ \forall x \in H.$$

Отсюда следует совпадение второго и третьего множеств. Совпадение первых двух множеств следует из равенства $\|\tilde{\pi}(f)x\|^2 = \int_X |f|^2 d\mu_x$. □

Прежде чем формулировать и доказывать основную теорему, сделаем одно несложное наблюдение об инволютивных алгебрах.

Определение 7. Пусть A — инволютивная алгебра. Двусторонний идеал $I \subset A$ называется $*$-*идеалом*, если для любого $a \in I$ выполнено $a^* \in I$.

Упражнение 13. Если I — двусторонний $*$-идеал в инволютивной алгебре A, то факторалгебра A/I является инволютивной алгеброй относительно инволюции $(a + I)^* = a^* + I$. Если A — инволютивная банахова алгебра, то A/I, снабженная факторнормой и только что введенной инволюцией, тоже является инволютивной банаховой алгеброй.

Теорема 6. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, H — сепарабельное гильбертово пространство, $\pi\colon C(X) \to \mathscr{B}(H)$ — унитальный $*$-гомоморфизм, $\tilde{\pi}$ — его каноническое продолжение на $B(X)$, $\mu \in M(X)$ — соответствующая скалярная спектральная мера. Тогда существует единственный $*$-гомоморфизм $\pi_\infty\colon L^\infty(X, \mu) \to \mathscr{B}(H)$, делающий следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{tikzcd} B(X) \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d] & \mathscr{B}(H) \\ L^\infty(X,\mu) \arrow[ur, "\pi_\infty"'] & \end{tikzcd}$$

При этом π_∞ инъективен и непрерывен относительно слабой* топологии на $L^\infty(X, \mu)$ и слабо-операторной топологии на $\mathscr{B}(H)$.

Доказательство. Единственность π_∞ очевидна; докажем его существование. Положим $I_0 = \operatorname{Ker}\tilde{\pi}$; ясно, что это замкнутый $*$-идеал в $B(X)$. Рассмотрим линейный оператор

$$\pi_\infty\colon B(X)/I_0 \to \mathscr{B}(H), \quad f + I_0 \mapsto \tilde{\pi}(f).$$

Легко видеть, что π_∞ ограничен, инъективен и является $*$-гомоморфизмом. С учетом предложения 5, существует изометрический $*$-изоморфизм $B(X)/I_0 \to L^\infty(X,\mu)$, переводящий $f+I_0$ в класс эквивалентности функции f относительно μ (см. упражнение 3 из лекции 2). Отождествляя $B(X)/I_0$ и $L^\infty(X,\mu)$, получаем искомый гомоморфизм $\pi_\infty\colon L^\infty(X,\mu) \to \mathscr{B}(H)$.

Для доказательства непрерывности π_∞ относительно указанных топологий достаточно по заданным $x, y \in H$ подобрать $\rho \in L^1(X,\mu)$ так, чтобы

$$\|\pi_\infty(f)\|_{x,y} \leqslant \|f\|_\rho \qquad \text{для любой} \quad f \in L^\infty(X,\mu). \tag{1}$$

Итак, пусть $x, y \in H$. Тогда

$$\|\pi_\infty(f)\|_{x,y} = |\langle \tilde\pi(f)x, y\rangle| = \left|\int_X f\, dE_{x,y}\right| \tag{2}$$

(здесь мы, как обычно, использовали один и тот же символ f для обозначения функции и ее класса эквивалентности). Из определения скалярной спектральной меры легко следует, что $E_{x,y} \ll \mu$. Положим $\rho = dE_{x,y}/d\mu$; тогда из (2) получаем, что

$$\|\pi_\infty(f)\|_{x,y} = \left|\int_X f\rho\, d\mu\right| = \|f\|_\rho,$$

что доказывает (1). Тем самым теорема доказана. □

Упражнение 14. Докажите, что π_∞ изометрично.

Предыдущее упражнение нетрудно сделать «в лоб», но можно и вывести его из следующего более общего утверждения:

Упражнение 15*. Пусть A, B — унитальные C^*-алгебры, $\varphi\colon A \to B$ — инъективный унитальный $*$-гомоморфизм. Тогда φ изометричен.

Естественно поинтересоваться: а нельзя ли вместо скалярной спектральной меры в предыдущей теореме взять какую-нибудь другую?

Упражнение 16. Какой должна быть мера $\mu \in M(X)$, $\mu \geqslant 0$, чтобы для нее было справедливо заключение теоремы 6? (Найдите необходимое и достаточное условие.)

В применении к операторам теорема 6 дает следующее:

Теорема 7. *Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, содержащий $\sigma(T)$, $\mu \in M(K)$ — скалярная спектральная мера оператора T. Тогда L^∞-функциональное исчисление от T на (K,μ) существует и единственно. Кроме того, оно изометрично.*

Посмотрим теперь на свойства L^∞-функционального исчисления. Естественно ожидать, что L^∞-функциональные исчисления на разных компактах должны быть согласованы (ср. упр. 3 из лекции 11). Чтобы это утверждение имело смысл, согласованы должны быть и скалярные спектральные меры. Для точной формулировки этого результата введем следующее понятие.

Определение 8. Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство. *Носитель* меры $\mu \in M(X)$ — это подмножество $\operatorname{supp}\mu \subset X$, определяемое следующим образом:

$$x \notin \operatorname{supp}\mu \iff \exists \text{ окрестность } U \ni x : \mu(U) = 0.$$

Очевидно, $\operatorname{supp}\mu$ — замкнутое множество.

Замечание 5. Существует понятие носителя меры, заданной на произвольной σ-алгебре подмножеств любого множества, однако в этом случае носитель определен, вообще говоря, неоднозначно («носитель с неопределенным артиклем»). Носитель, определенный выше, естественно называть «топологическим носителем».

Упражнение 17. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, μ — его скалярная спектральная мера, определенная на некотором компакте $K \supset \sigma(T)$. Тогда $\operatorname{supp}\mu = \sigma(T)$.

Следствие 1. *Пусть $K, K_1 \subset \mathbb{C}$ — компакты, $\sigma(T) \subset K_1 \subset K$, и $\mu \in M(K)$ — скалярная спектральная мера для $T \in \mathscr{B}(H)$. Тогда ее ограничение $\mu|_{\mathscr{B}or(K_1)} \in M(K_1)$ также является скалярной спектральной мерой для T.*

Упражнение 18. В условиях предыдущего следствия обозначим через γ_∞^K и $\gamma_\infty^{K_1}$ L^∞-исчисления от T на K и K_1 соответственно, а через $r_{KK_1} \colon L^\infty(K,\mu) \to L^\infty(K_1,\mu)$ — гомоморфизм ограничения. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
L^\infty(K,\mu) \arrow[d, "r_{KK_1}"'] \arrow[dr, "\gamma_\infty^K"] & \\
 & \mathscr{B}(H) \\
L^\infty(K_1,\mu) \arrow[ur, "\gamma_\infty^{K_1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Поскольку L^∞-функциональное исчисление согласовано с борелевским (см. упражнение 8) и не зависит от выбора компакта $K \supset \sigma(T)$, мы можем вместо $\gamma_\infty(f)$ использовать традиционное обозначение $f(T)$ — как и для других встречавшихся нам ранее функциональных исчислений.

Еще одно важное свойство L^∞-функционального исчисления, которого нет у борелевского исчисления — это теорема об отображении спектра:

Упражнение 19. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, μ — его скалярная спектральная мера, определенная на некотором компакте $K \supset \sigma(T)$. Тогда для любой $f \in L^\infty(K,\mu)$ справедливо равенство

$$\sigma(f(T)) = \{ \text{ множество существенных значений } f \text{ на } \sigma(T) \, \}.$$